Vrai ou Faux ? A propos du CM du 02/02

Analyse 4
09/02/2023

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

VRAI. En effet, tous les points de $\mathring{A}$ sont adhérents à A car (cf. TD)

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Dit autrement : si $x \in \mathring{A}$, alors nécessairement $x \in A$ et donc il existe une suite $(x_k = x)_k \subset A$ qui converge (évidemment) vers x.

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

VRAI. En effet, tous les points de $\mathring{A}$ sont adhérents à A car (cf. TD)

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Dit autrement : si $x \in \mathring{A}$, alors nécessairement $x \in A$ et donc il existe une suite $(x_k = x)_k \subset A$ qui converge (évidemment) vers x.

Par contre, il existe des points adhérents qui ne sont pas intérieurs à A, ce sont les points du bord $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

Exemple : si $A = [0, 1[$, *alors* 1 *est adhérent à* A *car* $(1 - \frac{1}{k})_{k \geq 1} \subset A$ *et tend vers* 1, *mais* $1 \notin A$, *donc a fortiori* $1 \notin \mathring{A} =]0, 1[$.

Vrai/Faux 2 - Extérieur d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $x_0 \notin K$, alors x_0 est un point extérieur à K.

Vrai/Faux 2 - Extérieur d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $x_0 \notin K$, alors x_0 est un point extérieur à K.

VRAI. On rappelle que l'extérieur de K est l'intérieur de $\mathbb{R}^n \backslash K$.

$$K \text{ compact} \Rightarrow K \text{ fermé} \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash K \text{ ouvert} \Rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n \backslash K}^{\circ} = \mathbb{R}^n \backslash K.$$

Vrai/Faux 2 - Extérieur d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $x_0 \notin K$, alors x_0 est un point extérieur à K.

VRAI. On rappelle que l'extérieur de K est l'intérieur de $\mathbb{R}^n \backslash K$.

$$K \text{ compact} \Rightarrow K \text{ fermé} \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash K \text{ ouvert} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \backslash K}} = \mathbb{R}^n \backslash K.$$

Rappel : si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \notin A$, x_0 n'est pas forcément extérieur à A. Contre-exemple : $A =]-\infty, 1[$, alors $x_0 = 1 \notin A$ mais x_0 n'est pas dans l'intérieur de $\mathbb{R} \backslash A = [1, +\infty[$ car, pour tout $r > 0$,

$$1 - \frac{r}{2} \in B(1, r) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{r}{2} \notin \mathbb{R} \backslash A.$$

En fait $x_0 = 1 \in \overline{A}$, c'est pourquoi il ne peut pas être dans $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \backslash A}}$

Vrai/Faux 3 - Intersection et union de compacts

Il existe $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux compacts tels que

$$K_1 \cup K_2 \quad \text{et} \quad K_1 \cap K_2$$

ne soient pas compacts.

Vrai/Faux 3 - Intersection et union de compacts

Il existe $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux compacts tels que

$$K_1 \cup K_2 \quad \text{et} \quad K_1 \cap K_2$$

ne soient pas compacts.

FAUX. D'après Heine-Borel, K_1 et K_2 sont fermés-bornés, donc :

- $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont fermés (cf. cours) ;
- $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont bornés (exercice),

donc ces deux ensembles sont compacts.

Vrai/Faux 4 - Union et intersection infinie de compacts

Soit $(K_j)_j \subset \mathbb{R}^n$ une famille infinie de compacts, alors

1. $\bigcup_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$;
2. $\bigcap_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 4 - Union et intersection infinie de compacts

Soit $(K_j)_j \subset \mathbb{R}^n$ une famille infinie de compacts, alors

1. $\bigcup_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$;
2. $\bigcap_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

1. est FAUX. Il suffit de considérer, pour $n = 1$,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} [-j, j] = \mathbb{R}$$

qui n'est pas un compact alors que, $\forall j \geq 1$, $K_j = [-j, j]$ est compact.

Vrai/Faux 4 - Union et intersection infinie de compacts

Soit $(K_j)_j \subset \mathbb{R}^n$ une famille infinie de compacts, alors

1. $\bigcup_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$;
2. $\bigcap_j K_j$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

1. est FAUX. Il suffit de considérer, pour $n = 1$,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} [-j, j] = \mathbb{R}$$

qui n'est pas un compact alors que, $\forall j \geq 1$, $K_j = [-j, j]$ est compact.

2. est VRAI. On vérifie que cet ensemble est fermé-borné :

- $\bigcap_j K_j$ est fermé comme intersection quelconque de fermés ;
- $\bigcap_j K_j$ est borné. En effet, soit $x \in \bigcap_j K_j$, alors $\forall j$, $x \in K_j$, et donc $\forall j$, $\exists M_j > 0$, $\|x\|_2 \leq M_j$ car les K_j sont tous bornés. On a donc

$$\|x\|_2 \leq \sup_j M_j = M$$

qui existe puisque l'ensemble $\{M_j\}_j$ est non-vide et majoré.