Vrai ou Faux ? A propos du CM du 23/02

Analyse 4
08/03/2024

Vrai/Faux 1 - Dérivées directionnelles

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur.

Vrai/Faux 1 - Dérivées directionnelles

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur.

FAUX. C'est le contraire ! Si f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur, cela veut dire que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \text{existe.}$$

Donc, en particulier, pour tout $1 \leq i \leq n$, f admet une dérivée directionnelle suivant chacun des vecteurs de base $e_i = (0, ..., 1, 0..., 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + t(0, ..., 1, 0..., 0)) - f(x_0)}{t} \quad \text{existe.}$$

Vrai/Faux 2 - Dérivées partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0.

Vrai/Faux 2 - Dérivées partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0.

FAUX. On a donné un contre-exemple en CM, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en $x_0 = (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

mais f n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x, \sqrt{x}) \to 1 \neq 0 = f(0,0)$ quand $x \to 0^+$.

Vrai/Faux 3 - Implications

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$, alors on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe pour tout vecteur } v \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existe} \\ &\Rightarrow D_{x_0} f \text{ existe} \end{aligned}$$

Vrai/Faux 3 - Implications

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe pour tout vecteur } v \\
&\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existe} \\
&\Rightarrow D_{x_0} f \text{ existe}
\end{aligned}$$

FAUX. La première implication est correcte (Vrai/Faux 1), mais l'existence des dérivées partielle n'implique pas la différentiabilité ! On a plutôt

$$D_{x_0} f \text{ existe} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existe}$$

Vrai/Faux 4 - Différentielle d'une composée

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = g(z, x, y).$$

Alors on a, pour tout $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{X_0} f(h) = \partial_2 g(X_0) h_1 + \partial_3 g(X_0) h_2 + \partial_1 g(X_0) h_3.$$

Vrai/Faux 4 - Différentielle d'une composée

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = g(z, x, y).$$

Alors on a, pour tout $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{X_0} f(h) = \partial_2 g(X_0) h_1 + \partial_3 g(X_0) h_2 + \partial_1 g(X_0) h_3.$$

FAUX. Les dérivées partielles de g doivent être calculées au point (z_0, x_0, y_0), et non plus en X_0. On a donc

$$D_{X_0} f(h) = \partial_2 g(z_0, x_0, y_0) h_1 + \partial_3 g(z_0, x_0, y_0) h_2 + \partial_1 g(z_0, x_0, y_0) h_3,$$

en utilisant la formule générale, incontournable et vue en CM :

$$D_{X_0} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) h_i.$$