Vrai ou Faux ? A propos du CM du 29/03

Analyse 4
05/04/2024

Vrai/Faux 1 - Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable, $(1, -1) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(1 + h, -1 + k) \in \Omega$, quand $(h, k) \to (0, 0)$,

$$f(1 + h, -1 + k) = \frac{2}{3}k - h + 2 + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right),$$

alors $f(1, -1) = \dfrac{2}{3}$, $\nabla_{(1,-1)} f = (-1, 2)$.

Vrai/Faux 1 - Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable, $(1,-1) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(1+h,-1+k) \in \Omega$, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$f(1+h,-1+k) = \frac{2}{3}k - h + 2 + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right),$$

alors $f(1,-1) = \frac{2}{3}$, $\nabla_{(1,-1)} f = (-1,2)$.

FAUX. Par unicité de la différentielle, on obtient

$$f(1,-1) = 2, \quad \nabla_{(1,-1)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\right) = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\underbrace{\|(h,k)\|_2}_{\sqrt{h^2+k^2}})$$

Vrai/Faux 2 - Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, $(0,2) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(h, 2+k) \in \Omega$, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$f(h, 2+k) = h^2 - 3k + 2k^2 - 5hk + 1 + h + o(h^2 + k^2),$$

alors $f(0,2) = 1$, $\nabla_{(0,2)} f = (1, -3)$, et $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Vrai/Faux 2 - Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, $(0,2) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(h, 2+k) \in \Omega$, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$f(h, 2+k) = h^2 - 3k + 2k^2 - 5hk + 1 + h + o(h^2 + k^2),$$

alors $f(0,2) = 1$, $\nabla_{(0,2)} f = (1, -3)$, et $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

VRAI. C'est une application directe de l'unicité du développement de Taylor (pas unicité des dérivées partielles premières et secondes)

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) \\ & = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\substack{=1 \\ \textbf{(constante)}}} + \underbrace{\left\langle \nabla_{(0,2)} f, (h,k) \right\rangle}_{\substack{=h-3k \\ \textbf{(linéaire)}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\langle H_f(0,2)(h,k), (h,k) \right\rangle}_{\substack{=\frac{1}{2}\left(2h^2+4k^2+2\times(-5)hk\right) \\ \textbf{(quadratique)}}} + o(\underbrace{\|(h,k)\|_2^2}_{=h^2+k^2}) \end{aligned}$$

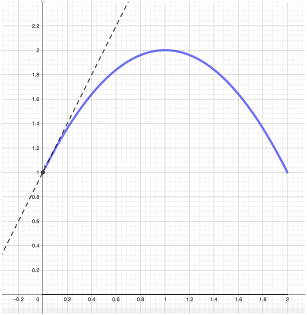
Vrai/Faux 3 - Point critique

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(0,0) \in E$ un minimum local de f.
Alors $(0,0)$ est un point critique de f, c'est-à-dire $\nabla_{(0,0)} f = 0$.

Vrai/Faux 3 - Point critique

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(0,0) \in E$ un minimum local de f.
Alors $(0,0)$ est un point critique de f, c'est-à-dire $\nabla_{(0,0)} f = 0$.

FAUX. Pour que ce soit vrai en général, il faut que $(0,0) \in \mathring{E}$ et que f soit différentiable en $(0,0)$.



Ici $E = [1,2]$, 0 est minimum local de f sur E, mais $f'(0) = 2 \neq 0$.

Vrai/Faux 4 - Preuve du CM de la semaine dernière

Une petite erreur s'est glissée dans le CM de la semaine dernière...

Vrai/Faux 4 - Preuve du CM de la semaine dernière

Une petite erreur s'est glissée dans le CM de la semaine dernière...

Et votre prof a malicieusement décidé de transformer cette (son !) erreur en question lors de l'avant-dernier Vrai-Faux du semestre, car ça lui permet de voir si vous relisez consciencieusement vos notes de cours d'une séance sur l'autre !

Vrai/Faux 4 - Preuve du CM de la semaine dernière

Une petite erreur s'est glissée dans le CM de la semaine dernière...

Et votre prof a malicieusement décidé de transformer cette (son !) erreur en question lors de l'avant-dernier Vrai-Faux du semestre, car ça lui permet de voir si vous relisez consciencieusement vos notes de cours d'une séance sur l'autre !

VRAI. Dans la preuve de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

- On souhaite que $g : [0,1] \to \Omega$,

$$t \mapsto f(x_0 + th) - f(x_0) - t\langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{t^2}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle$$

  soit continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

Vrai/Faux 4 - Preuve du CM de la semaine dernière

Une petite erreur s'est glissée dans le CM de la semaine dernière...

Et votre prof a malicieusement décidé de transformer cette (son !) erreur en question lors de l'avant-dernier Vrai-Faux du semestre, car ça lui permet de voir si vous relisez consciencieusement vos notes de cours d'une séance sur l'autre !

VRAI. Dans la preuve de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

- On souhaite que $g : [0,1] \to \Omega$,

$$t \mapsto f(x_0 + th) - f(x_0) - t\langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{t^2}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle$$

  soit continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

- Pour cela, il faut que $x_0 + th \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, et donc que

$$\underbrace{[x_0, x_0 + h]}_{\text{ET PAS } [x_0,h]} = \{x_0 + th, t \in [0,1]\} \subset \Omega$$