Vrai ou Faux ? A propos du CM du 26/01

Analyse 4
02/02/2024

Vrai/Faux 1

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$, alors

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Vrai/Faux 1

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$, alors

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

FAUX. Il s'agit de la boule fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(a, \sqrt{\delta})$ car

$$\begin{aligned} (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta &\iff \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \leq \sqrt{\delta} \\ &\iff \|x - a\|_2 \leq \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

et donc $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\|_2 \leq \sqrt{\delta}\} = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(a, \sqrt{\delta})$ est fermée.

Vrai/Faux 2

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 > r\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 2

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 > r\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

VRAI. On a $B = \overline{B}(a, r)^c$. Comme $\overline{B}(a, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 3

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ et soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de F telle que

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x \in F.$$

Alors F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 3

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ et soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de F telle que

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x \in F.$$

Alors F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

FAUX. Il faut que TOUTES les suites convergentes d'éléments de F convergent vers un élément de F.
Contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$:

$$F = B(0,1), \quad x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$$

mais $B(0,1)$ est un ouvert non-fermé.

Vrai/Faux 4

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 4

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

FAUX en général. $\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1} \right[= \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 4

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

FAUX en général. $\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right[= \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Par contre,

- $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$ et $\bigcap_{k=k_1}^{k_2}]a_k, b_k[$ sont toujours des ouverts de $\mathbb{R}$;
- il est possible qu'une intersection infinie d'ouverts soit un ouvert :

$$\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}]k, k+1[= \emptyset$$