Feuille 6 : Extrema
CORRECTION

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^4 + y^4$. *Montrons que* f *admet au point* $(1,2)$ *un minimum local. En effet, on trouve facilement que, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$. *Ainsi, la Hessienne de* f *au point* $(1,2)$ *est diagonale avec des coefficients strictement positifs, donc définie positive. On en déduit que* f *admet au point* $(1,2)$ *un minimum local.*

Correction. Les erreurs sont les suivantes :

1. Le calcul des dérivées partielles secondes est fausse. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$
2. Il est vrai que la hessienne au point $(1,2)$ est diagonale avec des coefficients positifs puisque
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 12 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 48 > 0.$$
Mais comme le point $(1,2)$ n'est pas un point critique car
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 32 \neq 0,$$
f n'admet pas de minimum local au point $(1,2)$. Le seul minimum local (global en fait) est $(0,0)$ car
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0$$
avec égalité si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. Notons aussi que $\nabla_{(x,y)} f = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$ et donc que $(0,0)$ est le seul point critique, donc le seul extremum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Extrema de polynômes
Déterminer les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 - 2x^2 + y^3 - 6y^2 - 4$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x+y)^2$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$

Correction.

1. Déterminons les points critiques de f. Les dérivées partielles premières de f en (x,y) sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 12y,$$
et le système d'équations des points critiques est donné par
$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff 4x^3 - 4x = 3y^2 - 12y = 0 \iff 4x(x^2-1) = 3y(y-4) = 0,$$
donc les points critiques de f sont
$$(0,0), (0,4), (1,0), (1,4), (-1,0), (-1,4).$$
Déterminons la hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y - 12 \end{pmatrix}$$
On a donc

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ est définie négative car ses valeurs propres sont $-4 < 0$ et $-12 < 0$, donc $(0,0)$ est un maximum local.
- $H_f(0,4) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$ est indéfinie car ses valeurs propres sont $-4 < 0$ et $36 > 0$, donc $(0,4)$ est un point selle.
- $H_f(1,0) = H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ est indéfinie car ses valeurs propres sont $8 > 0$ et $-12 < 0$, donc $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont des points selles.
- $H_f(1,4) = H_f(-1,4) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$ est définie positive car ses valeurs propres sont $8 > 0$ et $36 > 0$, donc $(1,4)$ et $(-1,4)$ sont des minima locaux.

2. Déterminons les points critiques de f. Les dérivées partielles premières de f en (x,y) sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4(x+y),$$

et le système d'équations des points critiques est donné par

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff 4x^3 - 4(x+y) = 4y^3 - 4(x+y) = 0$$

On a donc nécessairement $x^3 = y^3$ c'est-à-dire $x = y$, et on obtient $4x^3 - 8x = 0$, donc $4x(x^2-2) = 0$ et donc $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. On obtient ainsi les points critiques

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Déterminons la hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $H_f(0,0)$ est

$$P_0(X) = (-4 - X)^2 - 4^2 = X^2 + 8X = X(X+8),$$

donc les valeurs propres de $H_f(0,0)$ sont 0 et -8. On ne peut pas conclure directement. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons

$$f(x,x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$$

au voisinage de $x = 0$. Par contre, on a

$$f(x,-x) = 2x^4 \geq 0,$$

donc $(0,0)$ est un point selle de f.
Le polynôme caractéristique de $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est

$$P_{\sqrt{2}}(X) = (20 - X)^2 - 4^2 = (20 - X - 4)(20 - X + 4) = (16 - X)(24 - X),$$

donc les valeurs propres de $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont $16 > 0$ et $24 > 0$, donc $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est définie positive et ainsi f admet aux points $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ des minima locaux. Comme

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x+y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy \geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) = x^4 + y^4$$

alors $\lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, donc les points $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minimiseurs globaux de f.

3. Les dérivées partielles de f en $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2z,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2-6y,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2x-6z$$

et donc le système d'équations donnant les points critiques est

$$\nabla_{(x,y,z)}f=0 \iff 2z=2-6y=2x-6z=0.$$

On obtient donc $z=0$, puis $x=0$ et $y=\frac{1}{3}$, donnant l'unique point critique

$$\left(0,\frac{1}{3},0\right).$$

En tout point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, la hessienne de f est donnée par

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique

$$P(X)=\det(XI_3-H_f(x,y,z))=\det\begin{pmatrix} X & 0 & -2\\ 0 & 6+X & 0\\ -2 & 0 & 6+X\end{pmatrix}=X^3+12X^2+32X-24.$$

Comme on a $X^3+12X^2+32X-24=(X+6)(X^2+6X-4)$ alors les valeurs propres sont les solutions de $X+6=0$, c'est-à-dire $X=-6>0$ et $X^2+6X-4=0$, c'est-à-dire $X=-3+\sqrt{13}>0$ et $X=-3-\sqrt{13}<0$. Ainsi, le point $(0,1/3,0)$ est un point selle pour f.

Exercice 3. Formule de Taylor-Young et extrema

Dans chacun des cas suivants, donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f au voisinage de a et étudier la nature du point donné, s'il est critique.

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2-xy+y^2$, $a=(0,0)$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^3+2xy^2-y^4+x^2+3xy+y^2+10$, $a=(0,0)$

Correction.

1. La fonction étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et étant un polynôme homogène de degré 2 avec $f(a)=f(0,0)=0$, il est clair que $\nabla_a f=0$, donc a est un point critique de f, et que f correspond à son développement de Taylor en $(0,0)$:

$$\forall (h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,\quad f(h_1,h_2)=h_1^2+h_2^2-h_1h_2=\left(h_1-\frac{h_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}h_2^2.$$

Comme $\left(h_1-\frac{h_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}h_2^2\geq 0$ avec égalité si et seulement si $h_1-\frac{h_2}{2}=0$ et $h_2=0$, c'est-à-dire $h_2=h_1=0$, on en déduit que $H_f(0,0)$ est définie positive et que a est un minimum local de f.

2. Encore une fois, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a, pour tout $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, quand $(h_1,h_2)\to(0,0)$,

$$f(h_1,h_2)=10+h_1^2+3h_1h_2+h_2^2+R(h_1,h_2),$$

avec

$$\begin{aligned}|R(h_1,h_2)|=|h_1^3+2h_1h_2^2-h_2^4|&\leq |h_1|^3+2|h_1||h_2|^2+|h_2|^4\leq (h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}+2(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}+(h_1^2+h_2^2)^2\\ &\leq 3\|(h_1,h_2)\|_2^3+\|(h_1,h_2)\|_2^4\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{|R(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|^2}\leq 3\|(h_1,h_2)\|_2+\|(h_1,h_2)\|_2^2\to 0$$

ce qui veut dire que $R(h_1, h_2) = o(\|(h_1, h_2)\|^2)$ et donc que

$$f(h_1, h_2) = 10 + h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2 + o(\|(h_1, h_2)\|^2).$$

Par unicité du développement de Taylor-Young, $\nabla_a f = 0$, a est donc un point critique de f. Comme $\Phi(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2 + 3h_1h_2 = \left(h_1 + \frac{3}{2}h_2\right)^2 - \frac{5}{4}h_2^2$, on a $\Phi(-3/2, 1) = -5/4 < 0$ et $\Phi(0, 1) = 1 > 0$, donc $(0, 0)$ est un point selle de f.

Exercice 4. Un contre-exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet en $(0, 0)$ un minimum local.
3. Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Correction.

1. Les dérivées partielles de f au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xy.$$

Ainsi, les points critiques vérifient

$$2x - y^2 = 0 \quad \text{et} \quad -2xy = 0.$$

La deuxième équation nous donne $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, alors la première équation devient $-y^2 = 0$ et donc $y = 0$. Si $y = 0$, la première équation donne $x = 0$. Ainsi, le point $(0, 0)$ est l'unique point critique de f.

2. Toute droite de $\mathbb{R}^2$ non-verticale et passant par $(0, 0)$ s'écrit, pour un certain $a \in \mathbb{R}$,

$$D_a := \{(x, ax) : x \in \mathbb{R}\},$$

la droite verticale étant $D_v = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. La restriction de f à D_a est

$$g : x \mapsto f(x, ax) = x^2 - x(ax)^2 = -a^2x^3 + x^2.$$

La dérivée de g en tout point $x \in \mathbb{R}$ est $g'(x) = -3a^2x^2 + 2x = x(2 - 3a^2x)$. Celle-ci s'annule en $x = 0$ d'après la première question (et cela se vérifie facilement). De plus, $g''(x) = -6a^2x + 2$ et donc $g''(0) = 2 > 0$. On en déduit que $x = 0$ est un minimiseur local de g, c'est-à-dire que $(0, 0)$ est un minimum local de f_{D_a}.

- La restriction de f à D_v est

$$h : y \mapsto f(0, y) = 0.$$

Ainsi, $y = 0$ est trivialement un minimum local de h (comme tout $y \in \mathbb{R}$).

3. Il suffit de trouver une courbe sur laquelle la restriction de f n'admet pas de minimum local en $(0, 0)$. C'est le cas par exemple pour

$$C := \{(t^2, 2t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

En effet, on a $f(t^2, 2t) = t^4 - t^2(2t)^2 = -3t^4$ qui admet clairement un maximum local en $t = 0$. Ainsi, f ne peut admettre d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 5. Extrema sur un domaine I

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ et $K = [0,1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Etudier les extrema de f sur son bord $K\backslash]0,1[^2$.
3. Etudier les extrema de f sur $]0,1[^2$.
4. Déduire des questions précédentes les points où f admet son minimum et son maximum sur K.

Correction.

1. f est une fonction continue, car polynomiale et K est un compact car $[0,1]$ est compact (fermé borné dans $\mathbb{R}$), donc d'après le théorème de Weierstrass, f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Le carré $K\backslash]0,1[^2$ peut être écrit $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ où les quatre côtés de ce carrés sont donnés par
$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(x,0) : x \in [0,1]\} \\ D_2 &:= \{(x,1) : x \in [0,1]\} \\ D_3 &:= \{(0,y) : y \in [0,1]\} \\ D_3 &:= \{(1,y) : y \in [0,1]\}. \end{aligned}$$
Ainsi, on a
   - Sur D_1 et D_3, $\forall x \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$, $f(x,0) = f(0,y) = 0$.
   - Sur D_2, $\forall x \in [0,1]$, $f(x,1) = -x^3$ admet son maximum 0 pour $x = 0$, c'est-à-dire au point $(0,1)$ et son minimum -1 pour $x = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$.
   - Sur D_4, $\forall y \in [0,1]$, $f(1,y) = -y^3$ admet son maximum 0 pour $y = 0$, c'est-à-dire au point $(1,0)$ et son minimum -1 pour $y = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$.

   Ainsi, sur $K\backslash]0,1[^2$,
   - f admet pour maximum 0 atteint en tout point de D_1, D_3 ;
   - f admet pour minimum -1 atteint au point $(1,1)$.
3. Sur l'ouvert $]0,1[^2$, calculons les dérivées partielles de f :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-x^2-y^2) + xy(-2x) = y(1-3x^2-y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-3y^2-x^2),$$
et le système donnant les points critiques est
$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff y(1-3x^2-y^2) = x(1-3y^2-x^2) = 0.$$
On obtient que $(y = 0$ ou $y^2 = 1-3x^2)$ et $(x = 0$ ou $1-3y^2-x^2 = 0)$.
Si $y = 0$, alors $1-3y^2-x^2 = 1-x^2 = 0$ et donc $x \in \{-1,1\}$.
Si $x = 0$, alors $1-3x^2-y^2 = 1-y^2 = 0$ et donc $y \in \{-1,1\}$
Si $y^2 = 1-3x^2$, alors $1-3y^2-x^2 = 1-3(1-3x^2)-x^2 = 8x^2-2 = 0$, et donc $x \in \{-1/2, 1/2\}$, ce qui donne $1-3x^2 = 1-3/4 = 1/4$ et ainsi $y \in \{-1/2, 1/2\}$. Ainsi, l'unique point critique appartenant à $]0,1[^2$ est $(1/2,1/2)$.
Les dérivées secondes de f sur $]0,1[^2$ sont données par
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1-3y^2-3x^2,$$
et la hessienne de f au point $(1/2,1/2)$ est donc
$$H_f(1/2,1/2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$
de polynôme caractéristique
$$P(X) = \det(XI_3 - H_f(1/2,1/2)) = \det \begin{pmatrix} X+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(X+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (X+2)(X+1),$$
et donc les valeurs propres sont -1 et -2, ce qui veut dire que f admet un maximum au point $(1/2,1/2)$ qui vaut $f(1/2,1/2) = 1/8$.

4. On en déduit que f atteint son maximum $1/8$ sur K au point $(1/2, 1/2)$ et son minimum -1 au point $(1, 1)$.

Exercice 6. Extrema sur un domaine II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - yx^2 + x^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur l'intérieur de K donné par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.
3. Etudier les extrema de f sur K.

Correction.

1. f est polynômiale, donc continue. De plus, montrons que K est un compact de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un fermé-borné d'après le théorème de Heine-Borel. Ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass, f atteindra ses bornes sur K et aura donc un minimum et un maximum.
   K est fermé. En effet, soit $\{(x_k, y_k)\}_k \subset K$ qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k^2 - 1 \leq y_k \leq 1 - x_k^2$ et, en passant à la limite, on obtient que $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$ et donc que $(x, y) \in K$.
   K est borné. Soit $(x, y) \in K$, alors on a $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$, ce qui implique que $-1 \leq x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2 \leq 1$ car $x^2 \geq 0$, et donc $|y| \leq 1$. De plus, on a $x^2 - 1 \leq 1 - x^2$ et ainsi $2x^2 \leq 2$ ce qui donne $|x| \leq 1$. Ainsi, K est borné.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors
   $$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff (2x - 2xy, 2y - x^2) = (0, 0) \iff 2x(1 - y) = 0 \text{ et } x^2 = 2y \iff (x = 0 \text{ ou } y = 1) \text{ et } x^2 = 2y.$$
   Si $x = 0$, alors $2y = 0$ donc $y = 0$ et donc $(0, 0)$ est un point critique de f. Si $y = 1$ alors l'équation $x^2 = 2$ donne $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ et donc $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$ sont aussi points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que :
   • $(0, 0)$ appartient à l'intérieur de K car $0^1 - 1 = -1 \leq 0 \leq 1 - 0^2 = 1$,
   • $(-\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à l'intérieur de K car $(-\sqrt{2})^2 - 1 = 1$,
   • de même, $(\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à l'intérieur de K.
   Ainsi, $(0, 0)$ est l'unique point critique de f dans l'intérieur de K.
3. Déterminons la hessienne de f au point $(0, 0)$. Cette fonction est polynômiale, donc deux fois différentiable. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x.$$
   Ainsi, on a
   $$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   qui est déjà diagonale, donc $2 > 0$ est son unique valeur propre, ce qui veut dire que $H_f(0, 0)$ est définie positive et que $(0, 0)$ est un minimum local de f sur K. De plus, $f(0, 0) = 0$.
   Etudions maintenant f sur le bord de K, c'est-à-dire sur les morceaux de paraboles $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}$ et $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}$.
   Pour tout $(x, y) \in C_1$, on a
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x, y) = f(x, x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)x^2 + x^2 = 1.$$
   Pour tout $(x, y) \in C_2$, on a
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x, y) = f(x, 1 - x^2) = (1 - x^2)^2 - (1 - x^2)x^2 + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1.$$
   La fonction $x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1)$ qui s'annule pour $x = 0$ et $x \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. On peut aisément faire le tableau de variations de g et on trouve que g atteint sur $[-1, 1]$ son maximum, qui vaut 1 en -1, 0 et 1 et son minimum, qui vaut $1/2$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   On en déduit donc que le maximum de f sur K est 1, atteint sur C_1 et au point $(0, 1)$. De plus, le minimum de f est atteint en $(0, 0)$ et vaut 0.