Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 6 : Extrema

Objectifs	**OUI**	**NON**
Déterminer les points critiques d'une application		
Etudier la nature d'un point critique en étudiant la hessienne		
Déterminer d'autres extrema éventuels au bord d'un domaine		

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x^4 + y^4$. *Montrons que* f *admet au point* $(1, 2)$ *un minimum local. En effet, on trouve facilement que, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. *Ainsi, la Hessienne de* f *au point* $(1, 2)$ *est diagonale avec des coefficients strictement positifs, donc définie positive. On en déduit que* f *admet au point* $(1, 2)$ *un minimum local.*

Exercice 2. Extrema de polynômes
Déterminer les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 - 2x^2 + y^3 - 6y^2 - 4$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x + y)^2$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$

Exercice 3. Formule de Taylor-Young et extrema
Dans chacun des cas suivants, donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f au voisinage de a et étudier la nature du point donné, s'il est critique.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2$, $a = (0, 0)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$, $a = (0, 0)$

Exercice 4. Un contre-exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet en $(0, 0)$ un minimum local.
3. Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 5. Extrema sur un domaine I
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ et $K = [0, 1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Etudier les extrema de f sur son bord $K \backslash]0, 1[^2$.
3. Etudier les extrema de f sur $]0, 1[^2$.
4. Déduire des questions précédentes les points où f admet son minimum et son maximum sur K.

Exercice 6. Extrema sur un domaine II
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - yx^2 + x^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur l'intérieur de K donné par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.
3. Etudier les extrema de f sur K.