Feuille 5 : Différentielle d'ordre k et fonctions de classe C^k
CORRECTION

Exercice 1. Composées et fonctions de classe C^1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Montrer que h est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto (2+2t, t^2)$ est de classe C^1 car ses coordonnées sont des fonctions polynomiales. Ainsi g est de classe C^1 par composition. On écrit $g(t) = f(u(t), v(t))$ avec $u(t) = 2+2t$ et $v(t) = t^2$ et on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t)) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2+2t,t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2+2t,t^2).$$
2. L'application $(u,v) \mapsto (uv, u^2+v^2)$ est là encore de classe C^1 car chaque coordonnée est polynomiale, donc h est de classe C^1 par composition. Notons $r(u,v) = uv$ et $q(u,v) = u^2+v^2$, alors, comme $h(u,v) = f(r(u,v), q(u,v))$ on obtient
$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v),q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v),q(u,v)) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2),$$
et de la même façon,
$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v),q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v),q(u,v)) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2),$$

Exercice 2. Fonctions de classe C^1
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ et $f(0,0) = 0$.

Correction.

1. Comme on a $x^4 + y^2 = 0 \iff x^4 = y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$, il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1. Etudions la fonction en $(0,0)$. Pour cela, on calcule ses dérivées partielles en tout point $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y^3(3x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$
De plus, on a, pour tout $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0,$$
ce qui veut dire que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Montrons que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. En effet, on a, quand $(x,y) \to (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|-\frac{y^3(3x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}\right| \leq \frac{3x^4|y|^3}{(x^4+y^2)^2} + \frac{|y|^5}{(x^4+y^2)^2} \leq \frac{3(x^4+y^2)|y|(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2} + \frac{|y|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2}$$
$$\leq 3|y| + |y| = 4|y| \to 0$$

en utilisant le fait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^4 \leq x^4+y^2$, $y^2 \leq x^4+y^2$ et $y^4 \leq (x^4+y^2)^2$ (qui découle de l'inégalité précédente). De même, quand $(x,y) \to (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}\right| \leq \frac{3|x|^5y^2}{(x^4+y^2)^2} + \frac{|x|y^4}{(x^4+y^2)^2} \leq \frac{3|x|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2} + \frac{|x|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2} = 4|x| \to 0.$$

La fonction est donc de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. Il est clair que comme $x^2+y^2 \leq 0 \iff x^2 = y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme produit et composée de fonctions de classe C^1. Etudions la fonction au point $(0,0)$. Par symétrie des variables x et y, $f(x,y) = f(y,x)$, on ne traite que la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ au point $(0,0)$. On a, pour tout point $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}.$$

De plus, on a, pour tout $h \neq 0$,
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
et ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Enfin, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq 2|x|y^2|\ln(x^2+y^2)| + \frac{2x^2|y|^3}{x^2+y^2} \\ &\leq 2(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)| \times |x| + \frac{2(x^2+y^2)|y|^3}{x^2+y^2} \\ &\leq 2\|(x,y)\|_2^2|\ln\|(x,y)\|_2^2 \times |x| + 2|y|^3 \to 0\end{aligned}$$

quand $(x,y) \to (0,0)$ car $r \ln r \to 0$ quand $r \to 0^+$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ l'est aussi par symétrie des variables, et f est donc de classe C^1 en $(0,0)$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est différentiable en $(0,0)$.
4. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient (si $\alpha > 0$ ou produit (si $\alpha \leq 0$) de fonctions continues. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^\alpha} = (x^2+y^2)^{2-\alpha}.$$

Si $2-\alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 2$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{2-\alpha} = 0$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, ce qui veut dire que f est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.
Si $\alpha \geq 2$, alors pour tout $x \neq 0$, on calcule

$$f(x,x) = \frac{x^4}{(2x^2)^\alpha} = \frac{x^{4-2\alpha}}{2^\alpha}$$

qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. En effet, $4-2\alpha \leq 0$ et donc :

- soit $4-2\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 2$, et $f(x,x) = \frac{1}{4} \neq 0$,
- soit $4-2\alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 2$, et $f(x,x) \to +\infty$ quand $x \to 0$ car $4-2\alpha = 2(2-\alpha)$.

Dans ce cas, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Il est clair que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables. Ainsi, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Montrons que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Il suffit de calculer, pour tout $h \neq 0$ et $k \neq 0$,

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

qui tendent tous les deux vers 0 quand h et k tendent vers 0. Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ qui valent 0.

3. Si f est différentiable en $(0,0)$ alors sa différentielle est nulle. Pour $(h,k) \neq (0,0)$, on calcule

$$\frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}},$$

et ce quotient tend vers 0 si et seulement si $\alpha + \frac{1}{2} < 2$ (mêmes arguments qu'à la question 1.), c'est-à-dire $\alpha < \frac{3}{2}$. On en déduit que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha < \frac{3}{2}$.

4. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1. Si f est de classe C^1 en $(0,0)$, alors nécessairement f est différentiable et $\alpha > \frac{3}{2}$. On calcule, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2-\alpha x^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2(x^2+y^2-\alpha y^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}},$$

puis on majore de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{2|x|y^2(x^2+y^2+|\alpha|x^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)(x^2+y^2+|\alpha|(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}(1+|\alpha|)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}.
\end{aligned}$$

Par symétrie des variables x et y, on trouve aussi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}.$$

Ainsi, si $\frac{3}{2}-\alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < \frac{3}{2}$, on a que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha} = 0$ et ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

et donc les dérivées premières de f sont continues et ainsi f est de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tel que $g\in C^2(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xyg(x,y)$. Montrons, quelque soit g, le théorème de Schwarz est toujours vrai au point $(0,0)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

En effet, pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{xyg(x,y)}{x}=\lim_{x\to0}yg(x,y)=y\lim_{x\to0}g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,0).$$

De même, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{xyg(x,y)}{y}=\lim_{y\to0}xg(x,y)=x\lim_{y\to0}g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,y).$$

On obtient donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ et ainsi

$$\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)}{y}=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}g(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

On trouve, de même, $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}g(x,y)\right)$. Comme, quelque soit g, on a toujours

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}g(x,y)\right)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}g(x,y)\right),$$

alors on a bien que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et le théorème de Schwarz est vérifié.
Correction. Les erreurs commises sont les suivantes :

1. Pour pouvoir calculer les dérivées partielles (nulles) de f en $(0,0)$, il faut poser $f(0,0)=0$.
2. La première limite vaut, pour $y\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=y\lim_{x\to0}g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,y),$$
le point est donc $(0,y)$ au lieu de $(x,0)$.
3. La deuxième limite vaut, pour $x\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{y\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0}=x\lim_{y\to0}g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,0),$$
le point est donc $(x,0)$ au lieu de $(0,y)$.
4. La troisième limite est en fait
$$\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}g(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$
5. Il existe g tel que $\displaystyle\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}g(x,y)\right)\neq\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}g(x,y)\right)$.
Par exemple, si g est définie par $g(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, alors on a $g\in C^2(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})$ comme quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas, et
$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}g(x,y)\right)=\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2}=1,\quad\text{et}\quad\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}g(x,y)\right)=\lim_{x\to0}\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Correction.

1. Tout d'abord, il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Etudions le caractère C^1 de f en $(0,0)$. Pour cela, on montre que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

On a donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$, et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2|y|^3(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{4\sqrt{x^2+y^2}^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$. Reste à calculer, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^2}{k} = k$$

qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On a donc montré que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

et donc que les dérivées partielles premières de f sont continues en $(0,0)$. Cela montre que f est de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculons, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = 0, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

3. Calculons, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

et on a donc, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,x) = \frac{-8x^6}{(2x^2)^3} = -1$$

qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. On en déduit donc que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 6. Différentiabilité seconde
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier la différentiabilité de f.
3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.
4. Que peut-on en déduire ?

Correction.

1. Il est clair que f est continue sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$ comme produit et composée de fonctions continues. Soit $(x_0, -x_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash A$. Alors on sait que
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} xy = -x_0^2.$$
En revanche, la fonction $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right)$ n'a pas de limite en $(x_0, -x_0)$ mais est bornée. Ainsi, si $x_0 \neq 0$, alors f n'est pas continue en $(x_0, -x_0)$ alors que si $x_0 = 0$, on a
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} xy\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) = 0 = f(0,0),$$
car $xy \to 0$ et sin est bornée, et f est continue en $(x_0, -x_0) = (0,0)$. On en déduit que f est continue en tous les points de $\mathbb{R}^2$ à part les points (x,y) tels que $x = -y \neq 0$ (c'est-à-dire $x+y = 0$ mais $(x,y) \neq (0,0)$).
2. Notons E l'ensemble des points où f est continue, c'est-à-dire les points (x,y) tels que $x = -y \neq 0$ ou $(x,y) = (0,0)$. Soit $(x,y) \in E$.
Cas 1 : si $(x,y) \neq (0,0)$, alors $x+y \neq 0$ et f est de classe C^1 en (x,y) comme produit et composée de fonctions de classe C^1 en ce même point.
Cas 2 : si $(x,y) = (0,0)$, alors on a, pour tout $(h,k) \in E\backslash\{(0,0)\}$,
$$\frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} \leq \frac{|h||k|}{\|(h,k)\|_2} \leq \frac{\|(h,k)\|_2^2}{\|(h,k)\|_2} = \|(h,k)\|_2 \to 0$$
quand $(h,k) \to (0,0)$. On en déduit que f est différentiable en $(0,0)$ et que $D_{(0,0)}f$ est nulle.
3. Pour tout $y \neq 0$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y\sin\left(\frac{\pi(h-y)}{2(h+y)}\right) = y\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y.$$
Ainsi, on obtient
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{-y}{y} = -1,$$
et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.
De même, pour tout $x \neq 0$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)}{k} = \lim_{k\to 0} x\sin\left(\frac{\pi(x-k)}{2(x+k)}\right) = x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x.$$
Ainsi, on obtient
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \frac{x}{x} = 1,$$
et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

4. Comme
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),$$
on en déduit donc, d'après le théorème de Schwarz, que f n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7. Matrices hessiennes

Déterminer les matrices hessiennes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

Correction. Les fonctions données dans cet exercices sont deux fois différentiables comme sommes et composées de fonctions deux fois différentiables sur leur ensemble de définition. Elles admettent donc des dérivées partielles premières et secondes sur cet ensemble.

1. On calcule facilement, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2(x+y+z).$$
On a donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2.$$
La hessienne de f au point (x,y,z) est donc
$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
2. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4(y-x),$$
et on obtient donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4,$$
et la hessienne de f au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$
3. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on calcule
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz\cos(xyz), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz\cos(xyz), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy\cos(xyz).$$

et on a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -y^2z^2\sin(xyz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -x^2z^2\sin(xyz)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -x^2y^2\sin(xyz).$$

et ainsi la hessienne de f au point (x,y,z) est

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz) & y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz) \\ z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz) \\ y\cos(xyz) - xy^2z\sin(xyz) & x\cos(xyz) - x^2yz\sin(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz) \end{pmatrix}$$

4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}{x},$$

et ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y\left(x\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)\right)}{x^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\left(\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3},$$

ce qui implique que la hessienne de f au point (x,y) est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y\left(x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)\right)}{x^4} & -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3} \\ -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3} & \frac{2\left(\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)-\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x^2} \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Formules de Taylor-Young – Applications du cours

Ecrire la formule de Taylor-Young :

1. à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;
2. à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;
3. à l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3y - x^2 + y$.

Correction.

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. Pour tout (h,k,ℓ) et pour tout $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ où f est deux fois différentiable, tels que $(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell) \in \Omega$, alors on a, quand $(h,k,\ell) \to (0,0,0)$,

$$\begin{aligned} &f(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell) \\ &= f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)k + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ell \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)\ell^2\right) \\ &\quad\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,z_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)h\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0)k\ell + o(h^2+k^2+\ell^2). \end{aligned}$$

2. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. Pour tout (h,k) et pour tout $(x_0,y_0) \in \Omega$ où f est deux fois différentiable, tels que $(x_0+h, y_0+k) \in \Omega$, alors on a, quand $(h,k) \to (0,0,0)$,

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)\\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk\right)\\
&\quad\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)h^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)k^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x_0,y_0)hk^2\right)\\
&+ o(\|(h,k)\|_2^3).
\end{aligned}$$

3. Il est clair que, comme toutes les dérivées partielles de f, qui est un polynôme de degré 5, d'ordre 6 et plus s'annulent, on a, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(0+h, 0+k) = f(h,k) = k^5 + h^3k - h^2 + k.$$

Ce polynôme est l'exacte approximation de lui-même au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 9. Formules de Taylor-Young – Calculs

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$;
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{xy} + (x+y)^3$;
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \arctan(x^2+y)$.

Puis déterminer les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0,0)$ pour f, en $(1,0)$ pour g et en $(0,0)$ pour h.

Correction. Les fonctions données dans cet exercices sont deux fois différentiables comme sommes et composées de fonctions deux fois différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Elles admettent donc des dérivées partielles premières et secondes $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 3y\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x\sin(xy),$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4 - 3y^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -3x^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3xy\cos(xy) - 3\sin(xy).$$

De même

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3(x+y)^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3(x+y)^2 + xe^{xy},$$

et donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy}(xy+1) + 6(x+y).$$

Enfin on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y)^2+1}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2+1},$$

et donc

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(-3x^4 - 2x^2y + y^2 + 1)}{((x^2+y)^2+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2(x^2+y)}{((x^2+y)^2+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4x(x^2+y)}{((x^2+y)^2+1)^2}.$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

1. en $(0,0)$ pour f. On calcule $f(0,0)=3$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0.$$
On obtient donc, pour $(h,k)\to(0,0)$,
$$f(h,k)=3+2h^2+o(h^2+k^2).$$
2. en $(1,0)$ pour g. On calcule $g(1,0)=2$ et
$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)=3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=4,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0)=6, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=7, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=7.$$
On obtient donc, pour $(h,k)\to(0,0)$,
$$g(1+h,k)=2+3h+4k+3h^2+\frac{7}{2}k^2+7hk+o(h^2+k^2).$$
3. en $(0,0)$ pour h. On calcule $h(0,0)=\arctan(0)=0$ et
$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=1,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0)=2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)=0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)=0.$$
On obtient donc, pour $(k,\ell)\to 0$,
$$h(k,\ell)=\ell+k^2+o(k^2+\ell^2).$$

Les trois exercices suivants sont à faire en autonomie, pour s'entraîner à faire quelques calculs avec des dérivées partielles.

Exercice 10. Applications harmoniques

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, on définit le Laplacien de f par $\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

1. Montrer que pour $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, on a $\Delta h=0$.
2. Que peut-on dire du Laplacien de la fonction $g:\mathbb{R}^n\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\ln\|(x,y)\|_2$?

Correction.

1. Il suffit de calculer les dérivées partielles secondes et de les ajouter (au pire des cas, vérifier vos résultats avec Wolfram Alpha).
2. Même chose, et on trouve $\Delta g=0$.

Exercice 11. Calculs avec le Laplacien
Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (1, 0, -1)\}$. On considère l'application $f : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad f(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2}.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur U et que pour tout $(x, y, z) \in U$,

$$f(x, y, z)\Delta f(x, y, z) = 2.$$

2. En déduire que l'application $g : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad g(x, y, z) = \frac{1}{f(x, y, z)}$$

est harmonique sur U, c'est-à-dire que $\forall (x, y, z) \in U$, $\Delta g(x, y, z) = 0$.

Correction. La fonction f est de classe C^∞ comme composée de fonctions de classe C^∞ car $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 > 0$ pour $(x, y, z) \neq (1, 0, -1)$. Le reste est du simple calcul, en remarquant que

$$\begin{aligned}
\Delta g = \Delta\left(\frac{1}{f}\right) &= \partial^2_{xx}\left(\frac{1}{f}\right) + \partial^2_{yy}\left(\frac{1}{f}\right) + \partial^2_{zz}\left(\frac{1}{f}\right) \\
&= \partial_x\left(-\frac{\partial_x f}{f^2}\right) + \partial_y\left(-\frac{\partial_y f}{f^2}\right) + \partial_z\left(-\frac{\partial_z f}{f^2}\right) \\
&= -\frac{f^2\partial_x^2 f - (\partial_x f)(2f\partial_x f)}{f^4} - \frac{f^2\partial_y^2 f - (\partial_y f)(2f\partial_y f)}{f^4} - \frac{f^2\partial_z^2 f - (\partial_z f)(2f\partial_z f)}{f^4} \\
&= -\frac{\Delta f}{f^2} + 2\frac{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + (\partial_z f)^2}{f^3} \\
&= -\frac{\Delta f}{f^2} + 2\frac{\|\nabla f\|_2^2}{f^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 12. Laplacien en coordonnées polaires
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient (r, θ) les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'application

$$]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}, \quad (r\theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

soit un changement de variable. Soit $F :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Il s'agit de l'expression de f en coordonnées polaires. Le but de cet exercice est de calculer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)$.
2. Montrer que $r\dfrac{\partial F}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
4. Utiliser les résultats des questions précédentes et démontrer la formule demandée.

Correction. Aucune correction détaillée n'est nécessaire. Il suffit juste de suivre l'énoncé et d'utiliser les formules de dérivation des fonctions composées.