Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 5 : Différentielle d'ordre k et fonctions de classe C^k

Objectifs	OUI	NON
Déterminer la différentielle seconde d'une application et sa hessienne		
Montrer qu'une application est de classe C^k		
Appliquer le théorème de Schwarz		
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (voire 3)		

Exercice 1. Composées et fonctions de classe C^1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Montrer que h est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2. Fonctions de classe C^1
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est différentiable en $(0,0)$.
4. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $g \in C^2(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xyg(x,y)$. Montrons, quelque soit g, le théorème de Schwarz est toujours vrai au point $(0,0)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

En effet, pour tout $y \neq 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{xyg(x,y)}{x} = \lim_{x\to 0} yg(x,y) = y \lim_{x\to 0} g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0).$$

De même, on a, pour tout $x \neq 0$,

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{xyg(x,y)}{y} = \lim_{y\to 0} xg(x,y) = x \lim_{y\to 0} g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y).$$

On obtient donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ *et ainsi*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

On trouve, de même, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$. *Comme, quelque soit g, on a toujours*

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right),$$

alors on a bien que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *et le théorème de Schwarz est vérifié.*

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier la différentiabilité de f.
3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. Matrices hessiennes
Déterminer les matrices hessiennes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Exercice 8. Formules de Taylor-Young – Applications du cours
Ecrire la formule de Taylor-Young :

1. à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;
2. à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;

3. à l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3y - x^2 + y$.

Exercice 9. Formules de Taylor-Young – Calculs
Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$;
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{xy} + (x+y)^3$;
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \arctan(x^2 + y)$.

Puis déterminer les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0,0)$ pour f, en $(1,0)$ pour g et en $(0,0)$ pour h.

Les trois exercices suivants sont à faire en autonomie, pour s'entraîner à faire quelques calculs avec des dérivées partielles.

Exercice 10. Applications harmoniques
Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on définit le Laplacien de f par $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

1. Montrer que pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, on a $\Delta h = 0$.
2. Que peut-on dire du Laplacien de la fonction $g : \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln \|(x,y)\|_2$?

Exercice 11. Calculs avec le Laplacien
Soit $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \neq (1,0,-1)\}$. On considère l'application $f : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad f(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2}.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur U et que pour tout $(x,y,z) \in U$,
$$f(x,y,z)\Delta f(x,y,z) = 2.$$
2. En déduire que l'application $g : U \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,y,z) \in U, \quad g(x,y,z) = \frac{1}{f(x,y,z)}$$
est harmonique sur U, c'est-à-dire que $\forall (x,y,z) \in U$, $\Delta g(x,y,z) = 0$.

Exercice 12. Laplacien en coordonnées polaires
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient (r,θ) les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'application

$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \quad (r\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

soit un changement de variable. Soit $F :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Il s'agit de l'expression de f en coordonnées polaires. Le but de cet exercice est de calculer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)$.
2. Montrer que $r\dfrac{\partial F}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
4. Utiliser les résultats des questions précédentes et démontrer la formule demandée.