Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2022-2023

Feuille 4 : Différentiabilité
CORRECTION

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2^2} = \frac{e^{-h^2-k^2}\left|\sin(h^2+k^2)\right|}{h^2+k^2} \leq \frac{1}{h^2+k^2} \to +\infty$$

quand $(h,k) \to (0,0)$, *car* $|\sin(t)| \leq 1$ *et* $e^{-t} \leq 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Ainsi,* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

Correction. Les erreurs dans cette preuve sont les suivantes :

1. On doit écrire ces inégalités pour $(h,k) \neq (0,0)$.
2. On a $e^{-t} \leq 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ (et non pas $\mathbb{R}$).
3. L'argument est clairement faux, car ce n'est pas le bon quotient à considérer pour étudier la différentiabilité. De plus, majorer ce quotient par quelque chose qui tend vers l'infini ne donne aucune information sur la limite de ce quotient.

Montrons que f est différentiable en $(0,0)$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{e^{-h^2-k^2}\left|\sin(h^2+k^2)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \|(h,k)\|_2 e^{-\|(h,k)\|_2^2}\frac{\sin(\|(h,k)\|_2^2)}{\|(h,k)\|_2^2}.$$

Or, on a, quand $(h,k) \to (0,0)$, $\|(h,k)\|_2 \to 0$ et il suffit donc de déterminer, en posant $t = \|(h,k)\|_2$, $\lim\limits_{t\to 0} te^{-t^2}\frac{\sin(t^2)}{t^2}$. Comme $\lim_{t\to 0} e^{-t^2} = 1$ et $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^2)}{t^2} = 1$, on trouve que $\lim\limits_{t\to 0} te^{-t^2}\frac{\sin(t^2)}{t^2} = 0$ et donc

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = 0,$$

donc $f(h,k)-f(0,0) = o(\|(h,k)\|_2)$ ce qui prouve que f est différentiable de différentielle nulle.

Exercice 2. Calcul de différentielles - Applications directes du cours
Déterminer les différentielles $D_{x_0}f$ pour chacune des applications f et des points x_0 suivants.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x+1$, $x_0 = \sqrt{\pi}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 - \sin(x)$, $x_0 = 0$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x - y$, $x_0 = (1,2)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y, 3x-2y)$, $x_0 = (0,0)$.
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3\|(x,y)\|_2^2 + \Phi(x,y)$, $x_0 = (1,-1)$ où $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire.
6. $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_1 + 6x_3y_2 - 9x_3y_3$, $x_0 = ((0,0,1),(1,-1,0))$.

Correction.

1. On a, $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_{\sqrt{\pi}}f(h) = -4h$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$.
2. On a, $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_0 f(h) = 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 2x - \cos(x)$ et $f'(0) = 0$.
3. On a, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(1,2)}f(h,k) = 3h - k$ puisque f est une application linéaire.
4. On a, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(0,0)}f(h,k) = (2h+k, 3h-2k)$ car f est une application linéaire.

5. On a, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(1,-1)}f(h,k) = 6\langle (1,-1),(h,k)\rangle + \Phi(1,k) + \Phi(h,-1) = 6h - 6k + \Phi(1,k) + \Phi(h,-1)$.
6. Comme f est bilinéaire, on a $D_{x_0}f(h_1,h_2,h_3,k_1,k_2,k_3) = f((0,0,1),(k_1,k_2,k_3)) + f((h_1,h_2,h_3),(1,-1,0))$, c'est-à-dire $D_{x_0}f(h_1,h_2,h_3,k_1,k_2,k_3) = 3k_1 + 6k_2 - 9k_3 + 3h_1 + 3h_1 - h_2 - 3h_2 + 3h_3 - 6h_3 = 3k_1 + 6k_2 - 9k_3 + 6h_1 - 4h_2 - 6h_3$.

Exercice 3. Différentielle à l'origine du carré de la norme

Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = (N(x))^2.$$

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle $D_0 f$.

Correction.

1. Supposons que N soit différentiable en 0, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$N(h) - D_0N(h) = o(N(h)),$$

et ainsi

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left(1 - \frac{D_0N(h)}{N(h)}\right) = 0.$$

En remplaçant h par $-h$, on obtient de même

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left(1 + \frac{D_0N(h)}{N(h)}\right) = 0.$$

En sommant ces deux limites, on obtient que $2 = 0$ ce qui n'a pas de sens. N n'est donc pas différentiable en 0.

2. On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{|N(h)^2 - N(0)^2|}{N(h)} = N(h) \to 0,$$

on en déduit donc que f est différentiable en 0 et $D_0 f = 0$.

Exercice 4. Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0,0)$ une dérivée suivant tout vecteur
2. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction.

1. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Si $v_1 = 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \frac{0}{t} = 0$.

Si $v_1 \neq 0$, alors

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{t^2v_2^2 \ln|tv_1|}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} t\ln|t|v_2^2 + tv_2^2\ln|v_1| = 0.$$

On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit $y \neq 0$, alors on considère le point $(e^{-\frac{1}{y^2}}, y)$ qui tend vers $(0,0)$ quand $y \to 0$. De plus, on a

$$\forall y \neq 0, \quad f(e^{-\frac{1}{y^2}}, y) = 1 \neq 0.$$

Ainsi, f n'est pas continue en $(0,0)$, donc non-différentiable en ce point.

Exercice 5. Calcul de dérivées partielles
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité des calculs.

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = x\cos(x+2y)$.
3. $f(x,y) = x^y$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \arctan(2x-3y)$.
6. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+2y) - x\sin(x+2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x\sin(x+2y).$$
3. Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $f(x,y) = e^{y\ln(x)}$ et ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln(x)} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln(x)} = x^y\ln(x).$$
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x-3y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3}{1+(2x-3y)^2}.$$
6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 6. Différentielles de fonctions composées
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Justifier que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle.

1. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,-x)$.
2. $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto g(y,x)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x+g(x,y))$.
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(xy^2g(x,y))$.
5. $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x^2+y^2+z^2)$.

Correction.

1. Soit $x, h \in \mathbb{R}$, alors
$$D_x\phi(h) = \phi'(x)h = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,-x)\right) h.$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$D_{(x,y)}\psi(h,k) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)h + \frac{\partial g}{\partial x}(y,x)k.$$

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(x+g(x,y)), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)f'(x+g(x,y)),$$
et on obtient donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:
$$D_{(x,y)}h(u,v) = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(x+g(x,y))u + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)f'(x+g(x,y))v.$$

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \left(y^2g(x,y) + xy^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(xy^2g(x,y)), \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \left(2yxg(x,y) + xy^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) f'(xy^2g(x,y))$$
et on obtient donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:
$$D_{(x,y)}k(u,v) = \left(y^2g(x,y) + xy^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(xy^2g(x,y))u + \left(2yg(x,y) + xy^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) f'(xy^2g(x,y))v$$

5. On a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$,
$$D_{(x,y,z)}\ell(u,v,w) = 2f'(x^2+y^2+z^2)\,(xu+yv+zw)\,.$$

Exercice 7. Calculs de différentielles
Déterminer la différentielle de chacune des applications suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\sin(xy), x^2 - y^3)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2, y^2x^3, x+3y)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^y + \arctan(z), z\cosh(x^2+y^2))$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x^2, \cos(x), \arctan(x^5), \sinh(x^2-1))$.

Correction.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, alors, en notant $f = (f_1, f_2)$, on obtient que
$$D_{(x,y)}f_1(h,k) = y\cos(xy)h + x\cos(xy)k, \quad D_{(x,y)}f_2(h,k) = 2xh - 3y^2k.$$
et donc
$$D_{(x,y)}f(h,k) = \left(y\cos(xy)h + x\cos(xy)k, 2xh - 3y^2k\right).$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, alors, en notant $f = (f_1, f_2, f_3)$, on obtient que
$$D_{(x,y)}f_1(h,k) = 2xh, \quad D_{(x,y)}f_2(h,k) = 3x^2y^2h + 2yx^3k, \quad D_{(x,y)}f_3(h,k) = h + 3k,$$
et donc
$$D_{(x,y)}f(h,k) = \left(2xh, 3x^2y^2h + 2yx^3k, h+3k\right).$$

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3$, alors, en notant $f = (f_1, f_2)$, on obtient que

$$D_{(x,y,z)} f_1(h,k,\ell) = \frac{y}{x} x^y h + \ln(x) x^y k + \frac{\ell}{1+z^2}$$
$$D_{(x,y,z)} f_2(h,k,\ell) = 2xz \sinh(x^2+y^2) h + 2yz \sinh(x^2+y^2) k + \cosh(x^2+y^2)\ell,$$

   et donc

$$D_{(x,y,z)} f(h,k,\ell) = \left(\frac{y}{x} x^y h + \ln(x) x^y k + \frac{\ell}{1+z^2}, 2xz \sinh(x^2+y^2) h + 2yz \sinh(x^2+y^2) k + \cosh(x^2+y^2)\ell\right)$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, alors

$$D_x f(h) = \left(2xh, -\sin(x)h, \frac{5x^4 h}{1+x^{10}}, 2x\cosh(x^2-1)h\right)$$

Exercice 8. Contre-exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction.

1. Soit $t \neq 0$, alors
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0.$$
   On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2. On remarque que, pour tout $t \neq 0$,
$$f(t,t^2) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$
   et donc que f n'est pas continue en $(0,0)$ et donc non-différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9. Différentiabilité à l'origine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{\|(x,y)\|_2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Si f était différentiable en $(0,0)$, déduire de la question précédente quel serait sa différentielle.
3. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Correcton.

1. Soit $t \neq 0$, alors, quand $t \to 0$,
$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) \to 0,$$
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \to 0.$$
   Donc f admet des dérivées partielles nulles en $(0,0)$.

2. Si f est différentiable en $(0,0)$, on aurait nécessairement $D_{(0,0}f(h,k)=0$ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ d'après la question précédente.
3. Pour tout $(h,k)\neq(0,0)$, on a, quand $(h,k)\to(0,0)$,

$$\frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2}=\frac{|h|^2\left|\sin\left(\frac{1}{\|(h,k)\|_2}\right)\right|}{\|(h,k)\|_2}\leq\frac{|h|^2}{\|(h,k)\|_2}\leq\frac{\|(h,k)\|_2^2}{\|(h,k)\|_2}=\|(h,k)\|_2\to 0.$$

On en déduit que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est bien $D_{(0,0)}f(h,k)=0$ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Calculs de matrices jacobiennes, de différentielles et de jacobiens
Déterminer la matrice jacobienne, la différentielle et le jacobien (quand il existe) des applications f suivantes au point a donné.

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin(x^2y)$, $a=(1,0)$.
2. $f:(\mathbb{R}^*)^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},e^{-x^2}y\right)$, $a=(1,-1)$.
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $f(x,y,z)=(x-y,z+y,y^2x^3,-z^4y^2)$, $a=(-2,0,1)$.
4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(\sin(x),-z\cos(y),x+y+z)$, $a=(\pi,0,0)$.
5. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(r,\theta,\phi)=(r\cos\theta\cos\phi,r\sin\theta\cos\phi,r\sin\phi)$, $x_0=(r,\theta,\phi)$.

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\cos(x^2y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\cos(x^2y)$$

et donc, au point a, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1,$$

et donc

$$J_f(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}.$$

La différentielle de f en a est donc

$$D_af(h,k)=J_f(1,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=k.$$

2. On calcule les dérivées partielles de $f=(f_1,f_2)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=-2xe^{-x^2}y,\quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=e^{-x^2}$$

et donc, au point a, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1-1)=-1\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,-1)=1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,-1)=2e^{-1}\quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,-1)=e^{-1}$$

et donc

$$J_f(1,-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2e^{-1} & e^{-1}\end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $(h,k)\in(\mathbb{R}^*)^2$, on a

$$D_{(1,-1)}f(h,k)=J_f(1,-1)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2e^{-1} & e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h+k\\ 2e^{-1}h+e^{-1}k\end{pmatrix}.$$

De plus, le jacobien de f au point a vaut $\det(J_f(1,-1))=-e^{-1}-2e^{-1}=-3e^{-1}$.

3. Les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ sont

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = 1\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 2yx^3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 0\\
&\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y,z) = -2yz^4, \quad \frac{\partial f_4}{\partial z}(x,y,z) = -4z^3y^2,
\end{aligned}$$

et donc, au point a, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}(-2,0,1) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(-2,0,1) = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(-2,0,1) = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}(-2,0,1) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(-2,0,1) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(-2,0,1) = 1\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x}(-2,0,1) = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(-2,0,1) = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 0\\
&\frac{\partial f_4}{\partial x}(-2,0,1) = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(-2,0,1) = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial z}(-2,0,1) = 0,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$J_f(-2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de calculer, pour tout $(h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{(-2,0,1)}f(h,k,\ell) = J_f(-2,0,1)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-k \\ k+\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2, f_3)$ sont :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \cos(x), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = z\sin(y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = -\cos(y)\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 1,
\end{aligned}$$

et donc, au point a, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}(\pi,0,0) = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(\pi,0,0) = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(\pi,0,0) = -1\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$J_f(\pi,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de f au point a vaut donc $\det(J_f(\pi,0,0)) = -1$ et la différentielle de f en ce point est :

$$D_{(\pi,0,0)}f(h,k,\ell) = J_f(\pi,0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ -\ell \\ h+k+\ell \end{pmatrix}.$$

5. Les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2, f_3)$ en a sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = -r\sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = -r\cos\theta\sin\phi$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = r\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = -r\sin\theta\sin\phi$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \sin\phi, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = r\cos\phi,$$

et donc la jacobienne en a est

$$J_f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de f est donc $\det(J_f(r,\theta,\phi)) = r^2\cos\phi$ et la différentielle est donnée par

$$D_{(r,\theta,\phi)}f(h,k,\ell) = J_f(r,\theta,\phi)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Matrice jacobienne d'une composée

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1, x_2^2, x_1x_2^2),$$

et $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4) = (y_1^2 - y_2^2, y_2y_3 - y_4, y_1 - 1).$$

Déterminer, par deux méthodes différentes, la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Correction.

Méthode 1. On utilise la formule $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$. On calcule donc

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2a_2 \\ a_2^2 & 2a_1a_2 \end{pmatrix}$$

et

$$J_g(b_1,b_2,b_3,b_4) = \begin{pmatrix} 2b_1 & -2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $b = f(a)$, alors $b_1 = a_1 + 2a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2^2$, $b_4 = a_1a_2^2$ et on obtient

$$J_g(f(a)) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 4a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 4a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2a_2 \\ a_2^2 & 2a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_2 & 4a_1 + 8a_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2. On calcule directement

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = (4x_1x_2 + 4x_2^2, 0, x_1 + 2x_2 - 1)$$

et on obtient directement le même résultat.

Exercice 12. Gradient et composée

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\nabla_{(1,1,1)} f = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $t \neq 0$ par

$$\varphi(t) = \left(t^2, \frac{1}{t^3}, t\right).$$

1. Déterminer $D_{(1,1,1)} f(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^3$.
2. En déduire $(f \circ \varphi)'(1)$.

Correction.

1. La réponse est directement donnée par le gradient de f au point $(1, 1, 1)$, c'est-à-dire

$$D_{(1,1,1)} f(h) = 5h_1 + 2h_2 + h_3.$$

2. Par composition, on a

$$(f \circ \varphi)'(1) = D_{\varphi(1)} f(\varphi'(1)),$$

avec

$$\varphi'(1) = (2, -3, 1).$$

On obtient donc $(f \circ \varphi)'(1) = 5 \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 1 = 5$.

Exercice 13. Dérivation le long d'un arc

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$ un arc paramétré dérivable et $\mathcal{C} = \varphi(I)$ la courbe géométrique associée.

1. Montrer que, pour tout $t_0 \in I$, $(f \circ \varphi)'(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0)) x_i'(t_0)$.
2. Soit $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ un point singulier de $\mathcal{C}$. Calculez $(f \circ \varphi)'(t_0)$.
3. Si $n = 2$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (at + b, ct + d)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t_0)), \quad v = (a, c).$$

Dans ce cas, quelle est la nature de $\mathcal{C}$? Comment appelle-t-on v pour la courbe $\mathcal{C}$?

4. Soit $n = 2$. On suppose que $\mathcal{C}$ est une courbe régulière paramétrée par φ de telle sorte que $\|\varphi'(t)\|_2 = 1$ pour tout $t \in I$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $(f \circ \varphi)'(t)$ est la dérivée de f en $\varphi(t)$ le long du vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en ce point.
Que vaut cette quantité si $\|\varphi'(t)\|_2$ ne vaut pas toujours 1 ?
5. *Application :* soit $\varphi :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.
Déterminer la dérivée de f en $(1/2, \sqrt{3}/2)$ le long du vecteur tangent à $\mathcal{C} = \varphi(]0, 2\pi[)$ en ce point.

Correction.

1. Soit $t_0 \in I$, alors, d'après le cours (par dérivation d'une composée),

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = D_{\varphi(t_0)} f(\varphi'(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0)) x_i'(t_0).$$

2. Si $\varphi(t_0)$ est un point singulier, alors $\varphi'(t_0) = (0, ..., 0)$, donc d'après la formule précédente, on a $(f \circ \varphi)'(t_0) = 0$.

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Comme $x_1'(t_0) = a$ et $x_2'(t_0) = c$, alors

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = D_{\varphi(t_0)} f(a, c) = \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t_0)).$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}$ est une droite paramétrée de vecteur directeur v et passant par le point (b, d). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (a, c)t + (b, d)$.

4. Soit $t \in I$. On remarque que si $\|\varphi'(t)\| = 1$, alors le vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\varphi(t)$ est donné par $T(t) = \varphi'(t)$. On en déduit donc que

$$(f \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} f(T(t)) = \frac{\partial f}{\partial T(t)}(\varphi(t)),$$

qui est bien la dérivée de f en $\varphi(t)$ le long du vecteur tangent $T(t)$ à $\mathcal{C}$ en ce point.
Dans le cas général, on obtient

$$(f \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} f(\varphi'(t)) = D_{\varphi(t)} f(\|\varphi'(t)\| T(t)) = \|\varphi'(t)\| D_{\varphi(t)} f(T(t)) = \|\varphi'(t)\| \frac{\partial f}{\partial T(t)}(\varphi(t)).$$

5. On remarque que, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et donc $\|\varphi'(t)\|_2 = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$. De plus, $(1/2, \sqrt{3}/2) = \varphi(\pi/3)$. Ainsi, la paramétrisation φ est régulière et f est différentiable, donc on cherche simplement à calculer

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi)'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, \sqrt{3}/2) x_1'(\pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, \sqrt{3}/2) x_2'(\pi/3) \\
&= -2 \times \frac{1}{2} e^{-1}(-\sin(\pi/3)) - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} \cos(\pi/3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

car $\nabla_{(x,y)} f = (-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2})$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1$. On remarque aussi que $\mathcal{C}$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ privé du point $(1, 0)$.

Exercice 14. Fonctions homogènes
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite homogène de degré $\alpha \in \mathbb{N}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

1. Parmi les fonctions homogènes de degré 0, lesquelles sont continues en 0 ?
2. Montrer que si f est homogène de degré $\alpha > 0$ et bornée sur la sphère unité, alors f est continue en 0.
3. Montrer que si f est homogène de degré $\alpha \geq 1$ et différentiable en 0, alors ou bien f est linéaire et $\alpha = 1$, ou bien $\alpha > 1$ et $D_0 f = 0$.
4. Montrer que si f est homogène de degré $\alpha > 1$ et bornée sur la sphère unité, alors f est différentiable en 0 et $D_0 f = 0$.
5. Application : étudier la continuité et la différentiabilité en $(0, 0)$ des fonctions $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par
   (a) $f(x, y) = 0$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = x$.
   (b) $g(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.
   (c) $h(x, y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $h(0, 0) = 0$ en discutant suivant les valeurs de $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Correction.

1. Si f est homogène de degré 0, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(tx) = f(x).$$

Ainsi si f est continue en 0, alors quand $t \to 0$, on obtient $\forall x \neq 0$, $f(0) = \lim_{t\to 0} f(tx) = f(x)$. Ainsi, seules les fonctions constantes sont de degré 0 et continues en 0.

2. Si f est homogène de degré $\alpha > 0$, alors nécessairement $f(0) = 0$. Si de plus f est borné sur la sphère unité $\{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 = 1\}$, alors on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \|u\|_2=1}} f(ru) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \|u\|_2=1}} r^\alpha f(u) = 0 = f(0),$$

et donc f est continue en 0.

3. On a en effet, pour tout $h \neq 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{\alpha-1} f(h)$$

qui vaut $f(h)$ si $\alpha = 1$ (et donc f est linéaire) et 0 si $\alpha > 1$ (et donc $D_0 f(h) = 0$).

4. Encore une fois, pour tout $u \in S(0,1)$, on a

$$\frac{f(ru)}{r} = r^{\alpha-1} f(u) \to 0$$

quand $r \to 0$, car $\alpha > 1$ et f est bornée sur $S(0,1)$. Ainsi, f est différentiable en 0 de différentielle nulle.

5. Applications :
   (a) f est homogène de degré 1 et borné sur le cercle unité $S(0,1)$ car continue sur ce compact. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ d'après la question 2. De plus, comme f n'est pas linéaire mais que f est homogène de degré 1, on en déduit d'après la question 3. que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.
   (b) Même chose qu'au (a).
   (c) h est bien définie car $x^2 - xy + y = (x - y/2)^2 + 3y^2/4 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Ainsi, h est continue sur $S(0,1)$ qui est un compact, donc h est bornée sur la sphère unité. De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$h(tx,ty) = \frac{t^p t^q x^p x^q}{t^2x^2 - t^2xy + t^2y^2} = t^{p+q-2} h(x,y).$$

   Comme h n'est jamais constante ni linéaire, on sait donc que
   - h est continue en $(0,0)$ si et seulement si $p + q > 2$,
   - h est différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle, si et seulement si $p + q > 3$.