Feuille 3 : Limites et fonctions continues

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2+y^2}$.
Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *En effet, on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = 0$, *et comme* $(x,x) \to (0,0)$ *quand* $x \to 0$, *on a bien que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Correction. Les erreurs sont les suivantes :

1. Pour calculer la limite, comme $(x,y) \neq (0,0)$, il faudrait calculer $f(x,x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ (et non pas $\mathbb{R}$).
2. Même s'il est vrai que $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 0$, on ne peut PAS en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$! Cette limite existe si on obtient la même valeur en tendant vers $(0,0)$ de toutes les façons possibles.

Ainsi, on peut montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, on a, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$$

quand $x \to 0$, en utilisant le fait que $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi, f tend vers 0 sur la diagonale $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ et vers 1 sur l'axe des abscisses $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ quand $(x,y) \to (0,0)$, et n'a donc pas de limite au point $(0,0)$.
Alternativement : On peut aussi calculer, pour tout $y \neq 0$,

$$f(0,y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2} \to -1$$

quand $y \to 0$, *pour la même raison que précédemment, ce qui donne encore une autre limite différente des deux autres calculées plus haut, le long de l'axe des ordonnées cette fois-ci.*

Exercice 2. Fonction sur un cercle
Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $f(-x_0) = f(x_0)$.
Indication : On considérera la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t)$.
Correction. La fonction g est continue comme composée de fonctions continues car f, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et $t \mapsto (-\cos t, -\sin t)$ sont continues. On remarque que

$$g(0) = f(1,0) - f(-1,0) \quad \text{et} \quad g(\pi) = f(-1,0) - f(1,0) = -g(0).$$

Ainsi, $g(0)$ et $g(\pi)$ sont de signes opposés, et comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,\pi]$ tel que $g(t_0) = 0$, ce qui veut dire que, pour $x_0 = (\cos t_0, \sin t_0)$, on a $f(-x_0) = f(x_0)$.

Exercice 3. Fonctions höldériennes
Soit $\alpha > 0$. On dit que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est α-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|F(x) - F(y)\|_2 \leq C\|x - y\|_2^\alpha$.
Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, toute fonction α-höldérienne est continue.
Correction. Soit $\alpha > 0$, soit F une application α-holdérienne et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_2 \leq C\|x - x_0\|_2^\alpha < C\delta^\alpha = \varepsilon,$$

donc F est continue en x_0, et ainsi F est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Quelques limites
Déterminer la limite des fonctions suivantes au point a donné :

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ en $a = (0, 0)$.
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $a = (0, 0)$.
3. $f(x, y) = \dfrac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$ en $a = (2, 0)$.
   Indication : quand $x \to 2$, les points $(x, 0)$ et $(x, x - 2)$ tendent vers $(2, 0)$.
4. $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}}$ en $a = (0, 0)$.
5. $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x), \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ en $a = (0, 0)$.
6. $f(x, y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a = (0, 0)$.
   On discutera l'existence de la limite en fonction des valeurs de (α, β).
7. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x + y}$ et $a = (0, 0)$.
   Indication : On pourra choisir x en fonction de y de manière à obtenir $f(x, y) = y^\beta - y^\alpha$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a, puisque $x^2 \leq x^2 + y^2$,

   $$|f(x, y)| = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} = |y| \to 0$$

   quand $(x, y) \to (0, 0)$, et donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
   Alternativement : on peut écrire les variables en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, et remarquer que $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^2\theta\sin\theta$ de telle sorte que $0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r$ et donc que sa limite vaut 0 quand $r \to 0$ et pour tout θ.
2. La limite n'existe pas. En effet, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1,$$
   $$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

   On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} f(x, 0) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{\substack{y\to0\\y\neq0}} f(0, y)$.
3. La limite n'existe pas. En effet, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x, 0) = 0 \text{ et } f(x, x - 2) = \frac{1}{2}.$$

   Quand $x \to 2$, alors $(x, 0)$ et $(x, x-2)$ tendent vers $(2, 0)$ et donc f a des limites différentes suivant ces points.

4. La limite n'existe pas. En effet, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x,x) = ex \quad \text{ et } \quad f(x,x^2) = xe^{\frac{1}{x}}.$$
Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x,x^2) = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (par croissances comparées après avoir posé $X = 1/x$).

5. On note $f = (f_1, f_2)$. Pour f_1, on sait que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2-1 = -1$ et que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, ce qui implique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = -1$.
Pour f_2, on a
$$\begin{aligned} |f_2(x,y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \times \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{x^2} \times \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \times \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{x^2} \times \frac{y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2}\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$
Comme $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z^2)}{z^2} = 1$ et que $\lim_{(x,y)\to 0} \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$. Ainsi, on a montré que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (-1, 0).$$

6. On remarque que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ et } \quad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$
On trouve ainsi que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}.$$
Ainsi, si $\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 > 0$, c'est-à-dire $\alpha+\beta > 2$, on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} = 0$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Si $\alpha + \beta \leq 2$, alors
$$f(1/n, 0) = 0 \quad \text{ et } \quad f(1/n, 1/n) = \frac{1}{2}n^{2-\alpha-\beta}.$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} f(1/n, 1/n) \neq 0$, on en déduit que f n'a pas de limite en $(0,0)$.
Alternativement : en coordonnées polaires, soit $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors on a
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^\alpha \cos^\alpha \theta r^\beta \sin^\beta \theta}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha\theta \sin^\beta\theta.$$
Si $\alpha+\beta > 2$, alors on a $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r^{\alpha+\beta-2} \to 0$ quand $r \to 0$, et donc, par comparaison, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Si $\alpha + \beta = 0$, alors on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$ qui est non-constant par rapport à θ, et donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.
Si $\alpha+\beta < 2$, alors on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta}{r^{2-\alpha-\beta}}$ et donc $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ vaut $-\infty$ ou $+\infty$ (en fonction de θ), et ainsi f n'a pas de limite en $(0,0)$.

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors
$$f(y^\alpha - y, y) = \frac{(y^\alpha - y)y^2}{y^\alpha - y + y} = \frac{y^{\alpha+2} - y^3}{y^\alpha} = y^2 - y^{3-\alpha}.$$
Comme α est arbitraire, on peut le choisir :
- tel que $3 - \alpha > 0$, et dans ce cas $\lim_{y\to 0} f(y^\alpha - y, y) = 0$;
- tel que $3 - \alpha < 0$, et dans ce cas $\lim_{y\to 0^+} f(y^\alpha - y, y) = -\infty$.

Ainsi, la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 5. Continuité

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (On pourra démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2+y^2$ et en déduire que $|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$)
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

Correction.

1. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sqrt{x^2+y^2+1}-1 = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

   Etudions la continuité en $(0,0)$. Pour cela, on utilise les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0, \theta \in [0, 2\pi[$ et on trouve, quand $r \to 0$,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \frac{r^2}{1+\frac{r^2}{2}+o(r^2)-1} \to 2$$

   On a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2 = f(0,0)$, et ainsi f est continue en $(0,0)$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

   Etudions la continuité en $(0,0)$. L'inégalité $2|xy| \leq x^2+y^2$ est évidente pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ car découlant du fait que $(|x|-|y|)^2 \geq 0$. Elle s'écrit aussi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$

   On rappelle que l'on a aussi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \leq x^2+y^2 = \|(x,y)\|_2^2$. On obtient donc, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|3x^2+xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2} = 3\|(x,y)\|_2+\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \leq 4\|(x,y)\|_2.$$

   Comme la limite de $\|(x,y)\|_2$ en $(0,0)$ est 0, on en déduit que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et donc f est continue en $(0,0)$, ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   Alternativement : en coordonnées polaires, soit $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{|3r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta|}{r} = |3r\cos^2\theta + r\cos\theta\sin\theta| \leq 4r \to 0$$

   quand $r \to 0$, donc, par comparaison, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ d'où la continuité en $(0,0)$.

3. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais.
Etudions la continuité en $(0,0)$. Pour tout $x \neq 0$, on a
$$f(x,x) = \frac{e^{x^2}-1}{2x^2}, \quad \text{et} \quad f(-x,x) = \frac{e^{-x^2}-1}{2x^2}.$$
On sait que quand $t \to 0$, on a $e^t = 1 + t + o(t)$, et on trouve donc
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(-x,x) = -\frac{1}{2},$$
ce qui prouve que f n'admet pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
4. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme produit et composée de fonctions continues car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x^2 + y^2 \leq 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$
Etudions la continuité en $(0,0)$. On utilise encore le fait que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leq \|(x,y)\|_2$ et $|y| \leq \|(x,y)\|_2$. On trouve ainsi, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| \leq |xy| |\ln(\|(x,y)\|_2^2) = \|(x,y)\|^2 \ln(\|(x,y)\|_2^2)$$
Comme $\lim_{X\to 0^+} X \ln X = 0$, on trouve que $f(x,y)$ tend vers $0 = f(0,0)$ quand $(x,y) \to (0,0)$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.
5. Sur $B(0,1)$, f est continue car c'est un polynôme en les variables x et y. Sur $\overline{B}(0,1)^c$, f est aussi continue pour la même raison.
Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Montrons que f est continue en (x_0,y_0). Soit $\{(x_k,y_k)\}_k$ une suite qui converge vers (x_0,y_0). Soit $k \in \mathbb{N}$, alors :
   - Si $(x_k,y_k) \in B(0,1)$, alors $f(x_k,y_k) = x_k^2$ et $f(x_k,y_k) \to x_0^2 = f(x_0,y_0)$ quand $k \to +\infty$.
   - Si $(x_k,y_k) \in B(0,1)^c$, alors $f(x_k,y_k) = 2x_k^2 + y_k^2 - 1 \to 2x_0^2 + y_0^2 - 1 = 2x_0^2 + 1 - x_0^2 - 1 = x_0^2 = f(x_0,y_0)$.

   Ainsi, il est clair que la fonction f est continue en (x_0,y_0), et donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Fonctions Lipschitziennes
Soit $k > 0$. On dit que $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est k-lipschitzienne sur E si
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_2 \leq k\|x-y\|_2.$$

1. Montrer que toute fonction Lipschitzienne est continue.
2. En déduire que la norme $\|\cdot\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. On définit
$$d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto d(x,A) := \inf_{a\in A} \|x-a\|_2.$$
Montrer que d_A est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.
4. Supposons A compact, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x-a\|_2$.

Correction.
1. Soit $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ tel que, pour tout $x \in E$,
$$\|x_0 - x\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x_0) - f(x)\| \leq k\|x_0 - x\| < k\delta = \varepsilon.$$
On en déduit donc que f est continue en x_0 (arbitraire), et donc sur E.
2. L'application $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vérifie la deuxième inégalité triangulaire : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$|\|x\|_2 - \|y\|_2| \leq \|x-y\|_2,$$
elle est donc 1-lipschitzienne, et donc continue.

3. Soit $x, y, a \in E$, alors on a
$$d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x-a\|_2 \leq \|x-a\|_2 = \|x-y+y-a\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y-a\|_2,$$
ce qui veut dire que
$$d_A(x) - \|x-y\|_2 \leq \|y-a\|_2,$$
et ainsi, en prenant l'infimum parmi tous les $a \in A$,
$$d_A(x) - \|x-y\|_2 \leq d_A(y),$$
c'est-à-dire
$$d_A(x) - d_A(y) \leq \|x-y\|_2.$$
En échangeant le rôle de x et y, on obtient aussi
$$d_A(y) - d_A(x) \leq \|x-y\|_2,$$
et il en résulte donc que
$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x-y\|_2,$$
et d_A est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\|\cdot\|_2$ est continue, $a \mapsto \|x-a\|_2$ est continue sur A. Comme A est compact, cette application y atteint ses bornes, et en particulier son infimum qui est ainsi un minimum, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass. On en déduit l'existence de $a \in A$ tel que $\|x-a\|_2 = \inf_{a\in A} \|x-a\|_2 = d(x, A)$

Exercice 7. Application coercive
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non-borné et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur E, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(x_0)$.
Correction. Soit $a \in E$. On sait qu'il existe $R > 0$ tel que
$$\forall x \in E, \quad \|x\|_2 > R \Rightarrow f(x) > f(a).$$
Par ailleurs, pour ce réel R, $\overline{B}(O, R) \cap E$ est un fermé borné car E est fermé et $\overline{B}(O, R)$ est fermé et borné, donc $\overline{B}(O, R) \cap E$ est un compact non-vide. Ainsi, comme f est continue, f restreint au compact $\overline{B}(O, R) \cap E$ admet un minimum global en un certain x_0, qui est donc atteint, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass.