Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 3 : Limites et fonctions continues

Objectifs	**OUI**	**NON**
Manipuler la définition de continuité d'une fonctions		
Déterminer la limite d'une fonction en un point		
Montrer la continuité d'une fonction en un point (inégalités)		
Montrer la discontinuité d'une fonction en un point en utilisant des suites/courbes		
Utiliser le théorème de la borne atteinte		

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$.
Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$*. En effet, on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f(x,x) = 0$*, et comme* $(x,x) \to (0,0)$ *quand* $x \to 0$*, on a bien que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$*.*

Exercice 2. Fonction sur un cercle
Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $f(-x_0) = f(x_0)$.
Indication : On considérera la fonction $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t)$.

Exercice 3. Fonctions höldériennes
Soit $\alpha > 0$. On dit que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est α-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|F(x) - F(y)\|_2 \leq C\|x-y\|_2^{\alpha}$.
Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, toute fonction α-höldérienne est continue.

Exercice 4. Quelques limites
Déterminer la limite des fonctions suivantes au point a donné :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ en $a = (0,0)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $a = (0,0)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$ en $a = (2,0)$.
   Indication : quand $x \to 2$*, les points* $(x,0)$ *et* $(x,x-2)$ *tendent vers* $(2,0)$*.*
4. $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$ en $a = (0,0)$.
5. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ en $a = (0,0)$.
6. $f(x,y) = \dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a = (0,0)$.
   On discutera l'existence de la limite en fonction des valeurs de (α,β)*.*

7. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y}$ et $a = (0,0)$.
   Indication : On pourra choisir x en fonction de y de manière à obtenir $f(x,y) = y^\beta - y^\alpha$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Continuité
Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (On pourra démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2+y^2$ et en déduire que $|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$)
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

Exercice 6. Fonctions Lipschitziennes
Soit $k > 0$. On dit que $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est k-lipschitzienne sur E si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_2 \leq k\|x-y\|_2.$$

1. Montrer que toute fonction Lipschitzienne est continue.
2. En déduire que la norme $\|\cdot\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. On définit

   $$d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto d(x,A) := \inf_{a\in A} \|x-a\|_2.$$

   Montrer que d_A est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.
4. Supposons A compact, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x-a\|_2$.

Exercice 7. Application coercive
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non-borné et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur E, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(x_0)$.