Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 2 : Eléments de topologie de $\mathbb{R}^n$
CORRECTION

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Montrons que l'ensemble $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_n \subset \mathbb{R}^3$ *une suite, alors on a* $2x_n^2 + 5y_n^2 + z_n^2 < 2$ *et donc par passage à la limite, on a* $2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2$ *ce qui veut dire que la limite appartient à* A*, donc* A *est fermé.*
Correction. Les erreurs dans cette preuve sont les suivantes :

- L'ensemble n'est pas fermé, mais ouvert ! En effet, lors du passage à la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient que $2x^2 + 5y^2 + z^2 \leq 2$ et donc il n'est pas vrai que $(x, y, z) \in A$.
- La méthode pour montrer qu'un ensemble est fermé est ici mal rédigée. Il faut en effet prendre une suite $\{(x_n, y_n, z_n)\}_n \subset A$ $\underline{\text{qui converge vers } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3}$. Comme on a $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $2x_n^2 + 5y_n^2 + z_n^2 < 2$, alors etc..

Montrons que A est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ en considérant son complémentaire $A^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 5y^2 + z^2 \geq 2\}$. Soit $\{(x_n, y_n, z_n)\}_n \subset A^c$ qui converge vers $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2x_n^2 + 5y_n^2 + z_n^2 \geq 2$ et donc, par passage à la limite, on obtient $2x^2 + 5y^2 + z^2 \geq 2$ et donc $(x, y, z) \in A^c$. On en déduit que A^c est fermé dans $\mathbb{R}^3$, et donc que A est ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Ouverts, fermés et compacts de $\mathbb{R}^n$
Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? compacts ? aucun des trois ? Justifier.
Indication : représenter graphiquement ces ensembles.

1. $]3, 4[$ dans $\mathbb{R}$
2. $[0, 5]$ dans $\mathbb{R}$
3. $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$
4. $]-2, 4[\cup]5, 6[$ dans $\mathbb{R}$
5. $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
6. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ dans $\mathbb{R}$
7. $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
8. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
9. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
10. $]-2, 1[\times[0, 3]$ dans $\mathbb{R}^2$
11. $\{9\} \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$
12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ dans $\mathbb{R}^2$
13. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$ dans $\mathbb{R}^2$
14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
15. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$
16. $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
17. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. $]3, 4[$ est un **ouvert**. En effet, on a $]3, 4[= B(3.5, 0.5)$ pour la valeur absolue et toute boule ouverte est un ouvert.

2. $[0,5]$ est un **compact**. En effet, on a $[0,5] = \overline{B}(2.5, 2.5)$ et toute boule fermée est un fermé. Comme $[0,5] \subset B(0,6)$ est borné, c'est donc un compact.
3. $[0,1[$ n'est **ni ouvert ni fermé**. En effet, on peut considérer la suite $(x_k)_k$ définie pour tout $k \geq 1$ par $x_k = 1 - \frac{1}{k}$. Alors $x_k \in [0,1[$ pour tout $k \geq 1$ et $\lim_{k\to+\infty} x_k = 1 \notin [0,1[$. Ainsi, $[0,1[$ n'est pas un fermé. Ce n'est pas non plus un ouvert car il n'existe aucun $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset [0,1[$, sinon on aurait $-\frac{r}{2} \in B(0,r) \cap [0,1[$, ce qui est impossible.
4. $]-2,4[\cup]5,6[$ est un **ouvert**. En effet, c'est l'union de deux ouverts qui est donc un ouvert.
5. $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ est un **ouvert** car c'est l'union de deux ouverts. On peut aussi le voir en remarquant que $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\{1\}$ est fermé.
6. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est un **compact**. En effet, on a
$$\left(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}\right)^c =]-\infty,0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right) \cup]1,+\infty[$$
Comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, alors $\left(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}\right)^c$ est un ouvert, donc l'ensemble $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est un fermé. De plus l'ensemble est borné, car inclus dans $B(0,1)$ donc compact.
7. $\mathbb{N}$ est un **fermé**. En effet, on a
$$\mathbb{N}^c =]-\infty,0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[\right)$$
qui est une union d'ouverts, et donc un ouvert. Ainsi $\mathbb{N}$ est fermé. Cet ensemble n'est pas borné, donc non-compact.
8. $\mathbb{Q}$ n'est **ni ouvert, ni fermé**. En effet, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite $(x_k)_k \subset \mathbb{Q}$ qui converge vers x, et donc $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. De même, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$ et donc pour tout $y \in \mathbb{Q}$, il existe une suite $(y_k)_k \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ qui converge vers x. Ainsi, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas fermé, donc $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.
Un exemple de suite d'irrationnels convergant vers un rationnel est donné par $\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \to 0$.
Un exemple de suite de rationnels convergeant vers un irrationnel est donné par $\left(\frac{E(10^k x)}{10^k}\right)_k \to x$ *où x est n'importe quel irrationnel (par exemple $\sqrt{2}$ ou π).*
9. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est un **compact**. En effet, il s'agit de la sphère unité $S(0,1)$ qui est fermée. De plus l'ensemble est borné car incluse dans la boule unité fermée, donc compact.
10. $]-2,1[\times[0,3]$ n'est **ni ouvert ni fermé**. En effet, le point $(0,0)$ appartient à l'ensemble mais il n'existe aucun $r > 0$ tel que la boule ouvert $B((0,0),r)$ soit incluse dans cet ensemble, sinon on aurait $(-r/2, 0) \in B((0,0),r) \cap (]-2,1[\times[0,3])$, ce qui est impossible, donc cet ensemble n'est pas un ouvert. De plus, la suite $(x_k)_k$ de points $x_k = (-2 + \frac{1}{k}, 1)$ est incluse dans l'ensemble mais converge vers $(-2,1) \notin]-2,1[\times[0,3]$.
11. $\{9\} \times [0,1]$ est un **compact**. Soit $(x_k)_k \subset \{9\} \times [0,1]$ convergeant vers x. Alors on a $x_k = (9, y_k)$ avec $0 \leq y_k \leq 1$. Comme $(x_k)_k$ converge, $(y_k)_k$ converge aussi vers y telle que $x = (9,y)$ et $0 \leq y \leq 1$. Ainsi, $x \in \{9\} \times [0,1]$ et donc l'ensemble est fermé. De plus l'ensemble est borné car inclus dans $B(0,10)$ (par exemple), donc compact.
12. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$. Soit $\{(x_k,y_k)\}_k$ une suite de points de l'ensemble qui converge vers (x,y). On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_k^2$ et, en passant à la limite, on obtient que $y = x^2$ et donc (x,y) appartient bien à l'ensemble, ce qui veut dire que cet ensemble est bien fermé.
13. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$ est un **compact** de $\mathbb{R}^2$. En effet, cet ensemble est fermé car si $(x_n,y_n)_n$ est une suite de cet ensemble, qui converge vers (x,y), alors comme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2x_n^2 + 3y_n^2 \leq 6,$$

alors, en passant à la limite, on obtient $2x^2+3^2 \leq 6$ et donc (x,y) appartient bien à cet ensemble. De plus, il s'agit d'un ensemble borné, car pour tout (x,y) appartenant à celui-ci, on a

$$2x^2 \leq 2x^2+3y^2 \leq 6, \quad \text{et} \quad 3x^2 \leq 2x^2+3y^2 \leq 6$$

et ainsi $x^2 \leq 3$ et $y^2 \leq 2$, ce qui implique que $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ et donc que l'ensemble est contenu dans $B(0,\sqrt{5})$. On a donc montré que l'ensemble est fermé et borné, il s'agit donc d'un compact.
Alternativement, on peut en déduire que $|x| \leq \sqrt{3}$ et $|y| \leq \sqrt{2}$ ce qui montre aussi que l'ensemble est borné.

14. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ est un **ouvert**. En effet, son complémentaire est

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}.$$

Soit $\{(x_k,y_k)\}_k$ une suite de points de l'ensemble qui converge vers (x,y). Alors on a $x_k y_k \geq 1$ pour tout k et ainsi $xy \geq 1$, donc (x,y) appartient aussi à cet ensemble. Cela prouve que cet ensemble est fermé, et que donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ est un ouvert.

15. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$ n'est **ni ouvert ni fermé** dans $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout (x,y) dans cet ensemble, il n'existe pas de $r > 0$ tel que $B((x,y),r) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$. En particulier, pour tout $r > 0$, $(2,-r/2) \in B((2,0),r)$ mais $(2,-r/2) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$. L'ensemble n'est pas fermé non plus car la suite de points $(1+\frac{1}{k},0)$ est incluse dans l'ensemble qui ne contient pas sa limite $(1,0)$.

16. $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, x \neq 0\}$ n'est **ni fermé ni ouvert**. Ce n'est pas un ouvert car il n'y a pas de boule ouverte centrée en $(0,0)$ (par exemple) incluse dans l'ensemble, sinon on aurait $(-r/2,0)$ qui appartiendrait à cet ensemble pour un certain $r > 0$, ce qui est faux. Ce n'est pas un fermé car on peut construire facilement une suite de points de l'ensemble tendant vers $(0,1)$ qui n'appartient pas à cet ensemble, par exemple la suite $(1/k, \sqrt{1-1/k^2})_k$.

17. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x-1| < 1\}$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$. Soit (x,y) dans cet ensemble noté A, alors on a $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que $1 \notin]x-r, x+r[$ et $0 < x-r < x < x+r < 2$. Alors

$$B_2((x,y),r) \subset B_\infty((x,y),r) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-a|,|y-b|\} < r\} \subset A,$$

et donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Plus simplement, on remarque que cet ensemble est donc $(]0,1[\cup]1,2[) \times \mathbb{R}$. *Comme* $]0,1[\cup]1,2[$ *et* $\mathbb{R}$ *sont ouverts, l'ensemble est ouvert comme produit cartésien d'ouverts.*

Exercice 3. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'adhérence de A par

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

1. Montrer que $A \subset \overline{A}$.
2. Montrer que $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus petit fermé contenant A.
3. Montrer que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $x \in A$, alors pour tout F fermé tel que $A \subset F$, on a clairement $x \in F$. Ainsi $x \in \overline{A}$.
2. $\overline{A}$ est une intersection quelconque de fermés, c'est donc un fermé. Soit F un fermé contenant A, alors il est clair que $\overline{A} \subset F$. En effet, si $x \in \overline{A}$, alors x appartient à tous les fermés F contenant A, donc $x \in F$. Il s'agit donc du plus petit fermé contenant A.
Remarque : on peut maintenant montrer que cette définition de $\bar{A}$, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A, est bien la même que celle donnée en cours, c'est-à-dire que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall V \text{ voisinage de } x, V \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k)_k \subset A, (x_k)_k \to x\} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

On sait déjà que les deux premiers ensembles sont égaux à $\bar{A}$ (le premier par définition, le deuxième comme montré en cours). Le dernier ensemble est le plus petit fermé contenant A comme prouvé précédemment. Montrons que les deux premiers ensembles correspondent bien à cette définition. En effet :

- *L'ensemble $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall V \text{ voisinage de } x, V \cap A \neq \emptyset\}$ est fermé. Si $x \notin \bar{A}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Si $y \in B(x, \varepsilon)$, alors $B(y, \varepsilon - \|x - y\|_2) \subset B(x, \varepsilon)$ et donc $B(y, \varepsilon - \|x - y\|_2) \cap A = \emptyset$, ce qui veut dire que $B(y, \varepsilon - \|x - y\|_2) \subset \bar{A}^c$, et donc que $\bar{A}^c$ est ouvert, d'où $\bar{A}$ fermé.*
- *L'ensemble $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k)_k \subset A, (x_k)_k \to x\}$ est le plus petit fermé contenant A. C'est un fermé d'après le point précédent. Si F est un fermé tel que $A \subset F$. Soit $x \in \bar{A}$, alors il existe $(x_k)_k \subset A$ qui tend vers x. Ainsi, $(x_k)_k \subset F$ qui est fermé, donc $x \in F$, et donc $\bar{A} \subset F$, ce qui montre bien que $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A, et tous les ensembles définis ci-dessus sont égaux.*

3. Il suffit de montrer que $\overline{A} \subset A$ si et seulement si A est fermé. En effet, si A est fermé, alors le fait que $\overline{A}$ soit le plus petit fermé contenant A, on a donc $\overline{A} \subset A$.
Réciproquement, si $\overline{A} \subset A$, alors $A = \overline{A}$ et donc A est fermé.

Exercice 4. Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'intérieur de A par

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathring{A} \subset A$.
2. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus grand ouvert contenu dans A.
3. Montrer que $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $x \in \mathring{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$, et donc en particulier $x \in A$. On a donc $\mathring{A} \subset A$.
2. Soit $x \in \mathring{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Montrons que $B(x, r) \subset \mathring{A}$, et ainsi que $\mathring{A}$ est un ouvert. En effet, soit $y \in B(x, r)$, alors comme $B(x, r)$ est un ouvert, il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$. On en déduit que $y \in \mathring{A}$ et donc que $B(x, r) \subset \mathring{A}$.
Soit Ω un ouvert tel que $\Omega \subset A$. Soit $x \in \Omega$, alors comme Ω est ouvert, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset \Omega \subset A$, donc $x \in \mathring{A}$ et on a montré que $\Omega \subset \mathring{A}$. Ainsi, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A au sens de l'inclusion.
3. Il suffit de montrer que $A \subset \mathring{A}$ si et seulement si A est un ouvert.
Si $A \subset \mathring{A}$, alors $A = \mathring{A}$ et comme $\mathring{A}$ est un ouvert, A est un ouvert.
Réciproquement, si A est un ouvert, comme $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, on a donc $A \subset \mathring{A}$.

Exercice 5. Somme d'ensembles
On définit la sommme de tout couple d'ensembles $\{A, B\} \subset \mathbb{R}^n$ par

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $A + \{b\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$, alors $A + B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Montrer que $A + B$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermés dans $\mathbb{R}^n$ mais que $A + B$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$.
Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_n = \{(1/n, 1)\}_n$.
5. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles compacts. Montrer, en utilisant des suites extraites, que $A + B$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $z \in A + \{b\}$, alors il existe $x \in A$ tel que $z = x + b$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Montrons alors que $B(z, r) = B(x + b, r) \subset A + \{b\}$. Soit $y \in B(x + b, r)$, alors $\|y - (x + b)\|_2 = \|(y - b) - x\|_2 < r$, et donc $y - b \in B(x, r) \subset A$ ce qui veut dire que $y \in A + \{b\}$. Ainsi, $\exists r > 0$ tel que $B(z, r) \subset A + \{b\}$ donc $A + \{b\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Il suffit de remarquer que $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + \{b\})$. Comme pour tout $b \in B$, $A + \{b\}$ est un ouvert d'après la question précédente, et comme toute union quelconque d'ouverts est un ouvert, on en déduit que $A + B$ est un ouvert.
3. Soit $(z_n)_n \subset A + B$ qui converge vers $z \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe deux suites $(x_n)_n \subset A$ et $(y_n)_n \subset B$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + y_n$. B étant compact, alors $(y_n)_n$ admet une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $y \in B$. On peut donc écrire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \to z - y =: x,$$
Comme A est fermé, on en déduit que $x \in A$. Ainsi, $z = x + y$ avec $x \in A$ et $y \in B$, donc $z \in A + B$, ce qui prouve que $A + B$ est fermé.
4. Soit $(u_n)_n \subset A$ qui converge vers $u \in \mathbb{R}^2$, alors on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Comme $(x_n, y_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n y_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi, en passant à la limite, et par continuité de l'application $(x, y) \mapsto xy$, on obtient $xy = 1$ et donc $u = (x, y) \in A$, ce qui prouve que A est fermé. De plus, $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, donc B est aussi un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Montrons que $A + B$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Il s'agit bien d'une suite de $A + B$ car $u_n = x_n + y_n$ avec $x_n = \left(\frac{1}{n}, n\right) \in A$ (car $\frac{1}{n} \times n = 1$) et $y_n = (0, 1 - n) \in B$. Or $u_n \to (0, 1) \notin A + B$ car tout élément de $A + B$ a sa première coordonnée non-nulle. Ainsi $A + B$ n'est pas fermé.
5. Soit $(z_n)_n \subset A + B$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in A$ et $y_n \in B$. Comme A est compact, la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $x \in A$. De plus, la suite $(y_{\varphi(n)})_n)$ étant une suite du compact B, elle admet aussi une sous-suite $(y_{\psi(n)})_n)$ qui converge vers $y \in B$. Comme la suite $(x_{\psi(n)})_n)$ est extraite de la suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, elle converge aussi vers x. Finalement, la suite $(z_{\psi(n)} = x_{\psi(n)} + y_{\psi(n)})_n$ est une suite extraite de $(z_n)_n$ qui converge vers $x + y$, donc $A + B$ est compact.

Exercice 6. Voisinage d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$. Montrer que K_r est un compact.

Indication : on admettra que $\| \cdot \|_2$ est une application continue.

Correction. Montrons que K_r est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Comme K est compact, alors K est borné, et il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\|_2 \leq M$. Soit $y \in K_r$, alors il existe $x \in K$ tel que $y \in \overline{B}(x, r)$ et donc $\|x - y\|_2 \leq r$. On a donc
$$\|y\|_2 = \|y - x + x\|_2 \leq \|y - x\|_2 + \|x\|_2 \leq r + M,$$
ce qui prouve que $K_r \subset \overline{B}(0, r + M)$ et donc que K_r est borné.
Montrons que K_r est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit $(y_n)_n \subset K_r$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n \in \overline{B}(x_n, r)$. La suite $(x_n)_n$ est une suite du compact K, donc admet une sous-suite $(x_\varphi(n))_n$ qui converge vers $x \in K$. De plus, comme $y_{\varphi(n)} \in \overline{B}(x_{\varphi(n)}, r)$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\|_2 \leq r$ et ainsi, en passant à la limite, par continuité de la norme, on obtient $\|y - x\|_2 \leq r$, ce qui veut dire que $y \in \overline{B}(x, r)$ avec $x \in K$, et donc que $y \in K_r$. On a donc montré que K_r est fermé, donc K est compact comme fermé borné de $\mathbb{R}^n$.
Alternativement, on peut remarquer que, pour tout $r > 0$, $K_r = K + \overline{B}(O, r)$ et, comme K et $\overline{B}(O, r)$ sont des compacts, on peut appliquer le résultat de la question 5 de l'exercice précédent pour conclure.

Exercice 7. Suites de disque dans $\mathbb{R}^2$
Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note B_k le disque

$$B_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{k} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{k} \right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{k^2} \right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{k+1} \subset B_k$ pour tout $k \geq 1$?
2. Soit $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

1. On reconnaît B_k comme la boule fermée de centre $(1/k, 1/k)$ et de rayon λ/k. De plus, on sait que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,R)$ si et seulement si $\|x - y\|_2 + r \leq R$. On en déduit donc que $B_{k+1} \subset B_k$ si et seulement si
$$\sqrt{2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)^2} \leq \frac{\lambda}{k} - \frac{\lambda}{k+1}$$
c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.
2. Comme démontré à la question précédente, si $\lambda \geq \sqrt{2}$ alors les boules $\{B_k\}$ sont emboitées et donc $B = B_1$ qui est un fermé. Si $\lambda < \sqrt{2}$, alors $(0,0)$ n'appartient à aucune boule B_k alors que la suite des centres $\{(1/k, 1/k)\}_k$ de ces boules converge vers $(0,0) \notin B$. Donc B n'est pas fermé. On a donc montré que B est fermé si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.