Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 2 : Eléments de topologie de $\mathbb{R}^n$

Objectifs	OUI	NON
Manipuler (abstraitement) les notions d'ouvert, fermé et compact		
Montrer qu'un ensemble est ouvert par des considérations géométriques		
Montrer qu'un ensemble est fermé/compact en utilisant des suites		

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Montrons que l'ensemble $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_n \subset \mathbb{R}^3$ *une suite, alors on a* $2x_n^2 + 5y_n^2 + z_n^2 < 2$ *et donc par passage à la limite, on a* $2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2$ *ce qui veut dire que la limite appartient à* A*, donc* A *est fermé.*

Exercice 2. Ouverts, fermés et compacts de $\mathbb{R}^n$
Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? compacts ? aucun des trois ? Justifier.
Indication : représenter graphiquement ces ensembles.

1. $]3, 4[$ dans $\mathbb{R}$
2. $[0, 5]$ dans $\mathbb{R}$
3. $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$
4. $]-2, 4[\cup]5, 6[$ dans $\mathbb{R}$
5. $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
6. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ dans $\mathbb{R}$
7. $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
8. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
9. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
10. $]-2, 1[\times[0, 3]$ dans $\mathbb{R}^2$
11. $\{9\} \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$
12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ dans $\mathbb{R}^2$
13. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$ dans $\mathbb{R}^2$
14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
15. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$
16. $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
17. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'adhérence de A par

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

1. Montrer que $A \subset \overline{A}$.
2. Montrer que $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus petit fermé contenant A.
3. Montrer que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'intérieur de A par

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathring{A} \subset A$.
2. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus grand ouvert contenu dans A.
3. Montrer que $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Somme d'ensembles
On définit la sommme de tout couple d'ensembles $\{A, B\} \subset \mathbb{R}^n$ par

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $A + \{b\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$, alors $A + B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Montrer que $A + B$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que les ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermés dans $\mathbb{R}^n$ mais que $A + B$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$.
   Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_n = \{(1/n, 1)\}_n$.
5. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles compacts. Montrer, en utilisant des suites extraites, que $A + B$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Voisinage d'un compact
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x,r)$. Montrer que K_r est un compact.
Indication : on admettra que $\|\cdot\|_2$ est une application continue.

Exercice 7. Suite de disques dans $\mathbb{R}^2$
Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note B_k le disque

$$B_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{k}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{k^2} \right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{k+1} \subset B_k$ pour tout $k \geq 1$?
2. Soit $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.