Feuille 1 : Normes sur $\mathbb{R}^n$

CORRECTION

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Montrons que l'application $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a :

1. *Si $(x, y) = (0, 0)$, alors $N(x, y) = N(0, 0) = 0$.*
2. *Soit $\lambda \geq 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |5 \times \lambda x + 3 \times \lambda y| = \lambda N(x, y)$.*
3. *Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |5x_1 + 5x_2 + 3y_1 + 3y_2| \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).$$

Correction. Les éléments faux sont les suivants :

- La positivité a été oubliée : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \geq 0$.
- Le deuxième point devrait être vérifié pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et on aurait ainsi $N(\lambda(x, y)) = |\lambda| N(x, y)$, ce qui est vrai ici.
- Le premier point ne permet de vérifier qu'une seule des implications de l'axiome de séparation ! En effet, $N(-3, 5) = |-15 + 15| = 0$ et donc on n'a pas $N(x, y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$, et donc N n'est pas une norme !

Exercice 2. Normes sur $\mathbb{R}^2$
Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ les applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x_1, x_2)\| := 2|x_1| + 3|x_2|, \quad \text{et} \quad \|(x_1, x_2)\|' := \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|).$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule unité associée à chacune de ces normes.
Correction. Montrons que $\|\cdot\|$ est une norme. On a en effet :

1. Positivité : soit $x \in \mathbb{R}^2$, alors $\|x\| \geq 0$.
2. Séparation : soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|x\| = 0 \iff 2|x_1| + 3|x_2| = 0 \iff |x_1| = |x_2| = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0, 0).$$

3. Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|\lambda x\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\| = 2|\lambda x_1| + 3|\lambda x_2| = 2|\lambda||x_1| + 3|\lambda||x_2| = |\lambda|(2|x_1| + 3|x_2|) = |\lambda|\|x\|.$$

4. Inégalité triangulaire : soient $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = 2|x_1 + y_1| + 3|x_2 + y_2| &\leq 2(|x_1| + |y_1|) + 3(|x_2| + |y_2|) \\ &\leq 2|x_1| + 3|x_2| + 2|y_1| + 3|y_2| \\ &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

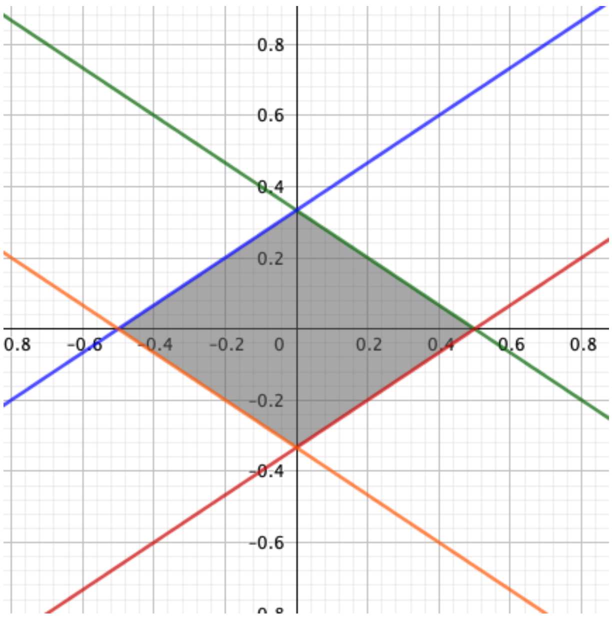
Montrons maintenant que $\|\cdot\|'$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a

1. Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|' \geq 0$.
2. Séparation : soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|x\|' = 0 \iff |x_1 + 3x_2| = |x_1 - x_2| = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \iff x = (0, 0).$$

3. Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\|\lambda x\|' = \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\|' = \max(|\lambda x_1 + 3\lambda x_2|, |\lambda x_1 - \lambda x_2|) = \max(|\lambda||x_1 + 3x_2|, |\lambda||x_1 - x_2|).$$
On a donc bien
$$\|\lambda x\|' = |\lambda| \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) = |\lambda|\|x\|'.$$
4. Inégalité triangulaire : soient $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\|x + y\|' = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\|' = \max(|x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2|, |x_1 + y_1 - x_2 - y_2|).$$
Comme on a, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue,
$$|x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2| \leq |x_1 + 3x_2| + |y_1 + 3y_2| \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|)$$
$$|x_1 + y_1 - x_2 - y_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|),$$
alors
$$\max(|x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2|, |x_1 + y_1 - x_2 - y_2|) \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|),$$
c'est-à-dire $\|x + y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$.

Pour tracer les boules unités
$$\bar{B}_{\|\cdot\|}(0,1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2|x_1| + 3|x_2| \leq 1\}, \quad \bar{B}_{\|\cdot\|'}(0,1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \leq 1\},$$
on doit faire plusieurs cas afin de nous débarasser des valeurs absolues.
Pour tracer $B_{\|\cdot\|}(0,1)$, on a les 4 cas suivants
$$\begin{aligned}
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &: 2|x_1| + 3|x_2| \leq 1 \iff 2x_1 + 3x_2 \leq 1 \iff x_2 \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 \\
x_1 \geq 0, x_2 < 0 &: 2|x_1| + 3|x_2| \leq 1 \iff 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \iff x_2 \geq \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3} \\
x_1 < 0, x_2 \geq 0 &: 2|x_1| + 3|x_2| \leq 1 \iff -2x_1 + 3x_2 \leq 1 \iff x_2 \leq \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3} \\
x_1 < 0, x_2 < 0 &: 2|x_1| + 3|x_2| \leq 1 \iff -2x_1 - 3x_2 \leq 1 \iff x_2 \geq -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$
On trace ainsi les droites d'équations $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1$ (vert), $x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}$ (rouge), $x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}$ (bleu) et $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}$ (orange) et on obtient $\bar{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ (en gris).



Pour tracer $B_{\|\cdot\|'}(0,1)$, on remarque que, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\max\left(|x_1+3x_2|,|x_1-x_2|\right)\le 1 \iff |x_1+3x_2|,\le 1 \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\le 1.$$

On a donc encore une fois 4 cas :

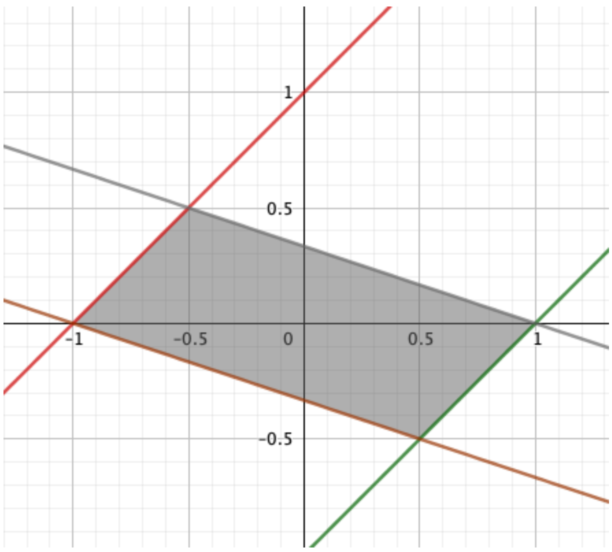
$$\begin{aligned} x_1+3x_2\ge 0, x_1-x_2\ge 0 : |x_1+3x_2|\le 1 \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\le 1 &\iff x_1+3x_2\le 1 \quad \text{et} \quad x_1-x_2\le 1\\ &\iff x_2\le -\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2\ge x_1-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2\ge 0, x_1-x_2\le 0 : |x_1+3x_2|\le 1 \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\le 1 &\iff x_1+3x_2\le 1 \quad \text{et} \quad -x_1+x_2\le 1\\ &\iff x_2\le -\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2\le x_1+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2\le 0, x_1-x_2\le 0 : |x_1+3x_2|\le 1 \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\le 1 &\iff -x_1-3x_2\le 1 \quad \text{et} \quad -x_1+x_2\le 1\\ &\iff x_2\ge -\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2\le x_1+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2\le 0, x_1-x_2\ge 0 : |x_1+3x_2|\le 1 \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\le 1 &\iff -x_1-3x_2\le 1 \quad \text{et} \quad x_1-x_2\le 1\\ &\iff x_2\ge -\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2\ge x_1-1. \end{aligned}$$

On trace les droites d'équations $x_2=-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}$ (marron), $x_2=x_1+1$ (rouge), $x_2=-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}$ (vert) et $x_2=x_1-1$ (gris) et on obtient $\bar{B}_{\|\cdot\|'}(0,1)$ (gris foncé).



Exercice 3. Norme 1 pondérée
Soit $\alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ et $N_\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ par

$$N_\alpha(x):=\sum_{i=1}^n \alpha_i|x_i|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que N_α soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Correction. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors on doit nécessairement avoir

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\quad N_\alpha(e_i)=\alpha_i>0.$$

Montrons que cette condition $\alpha\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ est suffisante. En effet, dans ce cas, on a :

1. Positivité : soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i| \geq 0$.
2. Séparation : soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$N_\alpha(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i| = 0 \iff \forall i \in \{1, ..., n\}, |x_i| = 0 \iff x = (0, ..., 0).$$
3. Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$N_\alpha(\lambda x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\lambda||x_i| = |\lambda| N_\alpha(x).$$
4. Inégalité triangulaire : soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a
$$N_\alpha(x+y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(|x_i| + |y_i|\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i| + \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i| = N_\alpha(x) + N_\alpha(y).$$

Exercice 4. Normes classiques équivalentes
On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et on note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$, si il existe deux réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$
On rappelle la définition des trois normes dites "classiques" sur $\mathbb{R}^n$:
$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |x_k|.$$
Montrer que ces trois normes sont équivalentes deux-à-deux.
Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

- $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$;
- $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = n\|x\|_\infty$,

et ainsi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, c'est-à-dire $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a aussi

- $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = \max_{1\leq k\leq n} \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (\max_{1\leq k\leq n} |x_k|)^2} = \sqrt{n\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$,

et ainsi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$, c'est-à-dire $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$.
Par transitivité, on a $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et donc ces trois normes sont équivalentes deux-à-deux.

Exercice 5. Normes et inégalités
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|.$$
En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.
La constante 2 peut-elle être améliorée ?

2. On considère maintenant la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2\right),$$

puis que

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \leq \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2.$$

En déduire que

$$\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2}\max(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2).$$

La constante $\sqrt{2}$ peut-elle être améliorée ?

Indication pour l'ensemble de l'exercice : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^n$, $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$.

Correction.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\|\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| \\
\|y\| &= \left\|\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|y+x\| + \frac{1}{2}\|y-x\|,
\end{aligned}$$

et ainsi, par symétrie $\|x-y\| = \|y-x\|$, on obtient

$$\|x\| + \|y\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|y+x\| + \frac{1}{2}\|y-x\| = \|x+y\| + \|x-y\|.$$

Comme $\|x+y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$ et $\|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$, on obtient finalement que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$

Soit $n = 2$ et considérons $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$, on obtient

$$\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 1+1 = 2 \quad 2\max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty) = 2\max(\|(1,1)\|_\infty, \|(1,1)\|_\infty) = 2\max(1,1) = 2.$$

Ainsi, on a $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 2\max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty)$ pour ces points et la constante 2 ne peut pas être améliorée.

2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors on a

$$\begin{aligned}
4\|x\|_2^2 = 4\left\|\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right\|_2^2 &= \|x+y+x-y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\langle x+y, x-y\rangle \\
&= \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + 2\langle x,y\rangle - 2\langle y,y\rangle \\
&= \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\|x\|_2^2 - 2\|y\|_2^2.
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$4\|y\|^2 = \|y+x\|_2^2 + \|y-x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 - 2\|x\|_2^2,$$

et ainsi

$$\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2\right).$$

De plus,

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

On obtient finalement, en utilisant l'égalité montrée précédemment,

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \leq 2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right) \leq \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 \leq 2\max\left(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2\right)^2$$

et on ainsi montré que $\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2}\max\left(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2\right)$.
Encore une fois, la constante ne peut pas être améliorée car pour $n = 2$, $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$, on a égalité

$$\|x\|_2 + \|y\|_2 = 2 = \sqrt{2}\max\left(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2\right) = 2.$$

Exercice 6. Norme et convergence d'une suite

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que la suite $(\|x_k\|)_k$ converge dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que la réciproque est fausse (pour $n = 2$ par exemple).
3. On suppose de plus que la suite $(y_k)_k$ converge vers $y \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite $(x_k + \lambda y_k)_k$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ et donner sa limite.

Correction.

1. Soit $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$, alors, par définition :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$
On rappelle la deuxième inégalité triangulaire pour x_k et x :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\|x_k\| - \|x\|| \leq \|x_k - x\|.$$
Soit $\varepsilon > 0$, alors on en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ (le même que précédemment) tel que pour tout $k \geq N$,
$$|\|x_k\| - \|x\|| \leq \|x_k - x\| < \varepsilon,$$
et ainsi la suite $(\|x_k\|)_k$ tend vers $\|x\|$ quand $k \to +\infty$.
2. Soit $n = 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $x_k = \left(-1 + \frac{1}{k}, 0\right)$ et $x = (1, 0)$. Alors $\|x_k\|_\infty = 1 - \frac{1}{k} \to 1 = \|x\|$. D'un autre côté, on a $(x_k)_k$ qui tend vers $(-1, 0) \neq x$. La réciproque est donc fausse.
3. C'est une question classique, déjà résolue dans des cours précédents. On cherche évidemment à montrer que $(x_k + \lambda y_k)_k$ converge vers $x + \lambda y$. Par définition :
$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x \iff \forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_1, \|x_k - x\| < \varepsilon_1$$
$$\lim_{k \to +\infty} y_k = y \iff \forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_2, \|y_k - y\| < \varepsilon_2.$$
Si $\lambda = 0$, alors le résultat est évident car il s'agit simplement de la convergence de $(x_k)_k$ vers x. Si $\lambda \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$, alors en appliquant les deux assertions précédentes à $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$, il existe $N = \max(N_1, N_2)$ tel que pour tout $k \geq N$,
$$\|x_k + \lambda y_k - (x + \lambda y)\| = \|x_k - x + \lambda(y_k - y)\| \leq \|x_k - x\| + |\lambda|\|y_k - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon,$$
où on a utilisé l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k + \lambda y_k = x + \lambda y$.

Exercice 7. Normes équivalentes et boules incluses
Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, on note $B_1(x, r)$ et $B_2(x, r)$ les boules pour les normes N_1 et N_2 centrées en x et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N_2(x) \leq kN_1(x)$;
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$, $B_1(x, r) \subset B_2(x, kr)$.
   (iii) $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$.
2. Montrer que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$,
$$B_1(x, r) \subset B_2\left(x, \frac{r}{m}\right) \quad \text{et} \quad B_2(x, r) \subset B_1(x, Mr).$$

Correction.

1. (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N_2(x) \leq kN_1(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit $y \in B_1(x, r)$, alors $N_1(x - y) < r$. On en déduit que $(1/k)N_2(x - y) < r$ et donc que $N_2(x - y) < kr$. Ainsi $y \in B_2(x, kr)$ et on a montré que $B_1(x, r) \subset B_2(x, kr)$.
   (ii) $\Rightarrow$ (iii). On applique simplement (ii) à $x = 0$ et $r = 1$.
   (iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{N_1(x)+\frac{1}{n}} \in B_1(0, 1)$ car, par homogénéité, $N_1\left(\frac{x}{N_1(x)+\frac{1}{n}}\right) = \frac{N_1(x)}{N_1(x)+\frac{1}{n}} < 1$. Comme $B_1(0, 1) \subset B_2(0, k)$, on en déduit que $\frac{x}{N_1(x)+\frac{1}{n}} \in B_2(0, k)$. Ainsi, $N_2\left(\frac{x}{N_1(x)+\frac{1}{n}}\right) < k$, c'est-à-dire $N_2(x) < k(N_1(x) + \frac{1}{n})$ par homogénéité (car $k > 0$). Ainsi, quand $n \to +\infty$, on obtient que $N_2(x) \leq kN_1(x)$.
   Remarque : Si les boules sont fermées dans l'équivalence précédente, le résutat reste vrai et il n'y a pas besoin d'ajouter $1/n$ puisque $x/N_1(x) \in \overline{B}(0, 1)$.
2. On a $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$mN_2(x) \leq N_1(x) \leq MN_2(x).$$
   On a donc $N_2(x) \leq \frac{1}{m}N_1(x)$, ce qui est équivalent, via (i) $\iff$ (ii), à $B_1(x, r) \subset B_2\left(x, \frac{r}{m}\right)$ pour tout $r > 0$. De même, $N_1(x) \leq MN_2(x)$ est équivalent à $B_2(x, r) \subset B_1(x, Mr)$ pour tout $r > 0$.

Exercice 8. Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz I
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$ et étudier le cas d'égalité.
2. On suppose en outre que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $x_k > 0$, et que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$
   et étudier le cas d'égalité.

Correction.

1. Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n) = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. On trouve alors
$$\left|\sum_{k=1}^n x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \|(x_1, ..., x_n)\|_2 \|(1, ..., 1)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
   On élève au carré et on obtient
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2.$$
   L'égalité est obtenue si et seulement si les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n) = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ sont liés, c'est-à-dire si et seulement si tous les x_k sont égaux.

2. On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $z = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $y = (1/\sqrt{x_1}, ..., 1/\sqrt{x_n})$:

$$\begin{aligned} n = \sum_{k=1}^{n} z_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ et que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $x_k > 0$. En élevant au carré, on obtient le résultat désiré.
On a égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs z et y sont liés, c'est-à-dire si il existe $\lambda > 0$ tel que $\sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}}$, autrement dit $x_k = \sqrt{\lambda}$ car toutes les quantités sont positives ici. On a donc égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux. Mais comme $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, on en déduit que $\forall k \in \{1, ...n\}$, $x_k = \frac{1}{n}$.