Feuille 0 : Révisions avant le premier Cours Magistral
CORRECTION

Exercice 1. Valeurs absolues (rappels)

1. Montrer que pour tous réels x et y, $|xy| = |x||y|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y, on a l'inégalité triangulaire
$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
et étudier le cas d'égalité.
3. Montrer que pour tous réels x et y, on a la deuxième inégalité triangulaire
$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|,$$
et étudier le cas d'égalité.
4. Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$.
5. Même question que la précédente avec $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $B' = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$, où $|\cdot|$ désigne ici le module.

Correction.

1. On rappelle que $|x| := \sqrt{x^2}$ et que, pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (obtenu facilement en élevant au carré). Ainsi, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors, comme $|x||y| = |xy| \geq xy$, on a
$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq |x|^2 + |y|^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2.$$
En prenant la racine carrée de l'inégalité précédente, on obtient
$$|x| + |y| = \sqrt{(|x| + |y|)^2} \geq \sqrt{(x + y)^2} = |x + y|.$$
On a égalité si et seulement si $|xy| = |x||y| = xy$, c'est-à-dire si et seulement si x et y ont même signe ou que l'un des deux est nul.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{et} \quad |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|.$$
On a ainsi montré que $|x| - |y| \leq |x - y|$ et $-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. On en déduit donc que $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$. De plus, on a
$$|\,|x| - |y|\,| = |x-y| \iff (|x|-|y|)^2 = |x-y|^2 \iff x^2+y^2-2|x||y| = x^2+y^2-2xy \iff |x||y| = xy$$
si et seulement si $xy \geq 0$, c'est-à-dire que x et y ont le même signe ou que l'un des deux est nul.
4. Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on a
$$x \in B \iff |x - a| < r \iff -r < x - a < r \iff a - r < x < a + r \iff x \in]a - r, a + r[.$$
Ainsi $B =]a - r, a + r[$.
5. B' est le disque de centre a et de rayon r.

Exercice 2. Questions simples sur les max

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ et $Y = \{y_1, ..., y_n\} \subset \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition du maximum M d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_k| = |\lambda| \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.
3. Montrer que $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k + y_k| \leq \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| + \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |y_k|$.
4. A-t-on $\max\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} xy = \left(\max\limits_{x \in X} x\right)\left(\max\limits_{y \in Y} y\right)$?

Correction.

1. Définition du maximum M de A : $M \in A$ et $\forall x \in A, x \leq M$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors que
$$\max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_k| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda||x_k| = |\lambda| \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$
3. On a, pour un certain $j \in [\![1, n]\!]$,
$$\max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k + y_k| = |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| + \max_{k \in [\![1,n]\!]} |y_k|.$$
4. Non, par exemple si $X = \{-1, 0\}$ et $Y = \{-2, 0\}$, alors
$$\max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} xy = 2 \neq \left(\max_{x \in X} x\right)\left(\max_{y \in Y} y\right) = 0 \times 0 = 0.$$
Par contre, la propriété est vraie si $X \subset \mathbb{R}_+$ et $Y \subset \mathbb{R}_+$. En effet, soit $M_X = \max X$ et $M_Y = \max Y$, alors on a, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, comme tous les nombres sont positifs,
$$xy \leq M_X M_Y.$$
Ainsi, le nombre $M_X M_Y$ est un majorant de $XY := \{xy : x \in X, y \in Y\}$. De plus, $M_X M_Y \in XY$, donc il s'agit, par définition, du maximum de XY, d'où $\max\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} xy = M_X M_Y$.

Exercice 3. Manipuler les max et les min

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné ayant un maximum et un minimum. Le but de cet exercice est de montrer que
$$\max_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \max A - \min A.$$
Dans la suite, on notera $\beta = \max A$, $\alpha = \min A$ et $D = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}$.

1. Montrer que $\beta - \alpha$ est un majorant de D.
2. Soit M un majorant de D.
   (a) Montrer que pour tout $y \in A$, $\beta \leq M + y$.
   (b) En déduire que $\beta - \alpha \leq M$.
3. Conclure.

Correction.

1. Pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $\alpha \leq x \leq \beta$ et $\alpha \leq y \leq \beta$. On en déduit que $-(\beta - \alpha) \leq x - y \leq \beta - \alpha$ et donc que $|x - y| \leq \beta - \alpha$. Ainsi, $\beta - \alpha$ est un majorant de D.
2. Soit M un majorant de D.
   (a) Soient $(x, y) \in A^2$, alors $x - y \leq M$, donc $x \leq M + y$. Ainsi, pour tout $y \in A$, $M + y$ majore A et ainsi, comme β est le plus petit des majorants de A, on obtient $\beta \leq M + y$.
   (b) D'après la question précédente, on a $\forall y \in A$, $y \geq \beta - M$, donc $\beta - M$ est un minorant de A. Comme α est le plus petit des minorant, on a $\beta - M \leq \alpha$ et donc $\beta - \alpha \leq M$.

<u>Aternativement :</u> Comme $x - y \leq M$ pour tout $(x, y) \in A^2$ alors c'est vrai pour $(x, y) = (\beta, \alpha)$ et donc $\beta - \alpha \leq M$.
On peut montrer le même résultat de cet exercice dans un cas plus général, avec des supremum et infimum : $\sup D = \sup A - \inf A$ *en suivant l'ensemble des questions.*

3. Pour tout majorant M de D, on a $\beta - \alpha \leq M$. Or $\beta - \alpha$ est aussi un majorant de D atteint pour $x = \max A$ et $y = \min A$, donc $\beta - \alpha = \max D$, ce qui prouve l'égalité demandée.

Exercice 4. Les suites... avec des ε
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que $(\sqrt[n]{|u_n|})_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $\ell \in [0, 1[$, alors $(u_n)_n$ tend vers 0.
Indication : Montrer qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(|u_n|)_n$ tend vers $+\infty$.
Indication : Montrer qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.
3. Montrer que si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire en général.
Indication : On pourra considérer la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. On suppose que $\ell \in [0, 1[$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$, alors par définition de la convergence de $(\sqrt[n]{|u_n|})_n$ vers $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{|u_n|} - \ell| < \varepsilon,$$
donc $\sqrt[n]{|u_n|} - \ell < \frac{1-\ell}{2}$ et ainsi $\sqrt[n]{|u_n|} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$, ce qui implique que $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Comme $\left|\frac{1+\ell}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n = 0$ et ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. On suppose $\ell > 1$. Soit $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{|u_n|} - \ell| < \varepsilon,$$
donc $\sqrt[n]{|u_n|} - \ell > -\frac{\ell-1}{2}$ et donc $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Comme $\ell > 1$, on a $\frac{1+\ell}{2} > 1$ et donc on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n = +\infty$, ce qui implique par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ définie par $u_n = n^\alpha$, alors comme $u_n = n^\alpha = e^{\alpha \ln n}$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$ qui tend vers $\ell = 1$ quand $n \to +\infty$, et cela pour tout α, car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par croissances comparées. De plus :
   - Si $\alpha = 0$, alors $u_n = 1 \to 1$ quand $n \to +\infty$.
   - Si $\alpha > 0$, alors $u_n = e^{\alpha \ln n} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
   - Si $\alpha < 0$, alors $u_n = e^{\alpha \ln n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   On ne peut donc rien conclure en général.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Racines n-ièmes et inégalités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Indication : Calculer $\left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, alors, comme les nombres sont tous positifs,

$$\left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{y})^k = (\sqrt[n]{x})^n + (\sqrt[n]{y})^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{y})^k \geq x + y.$$

On en déduit que $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \geq \sqrt[n]{x+y}$ comme demandé.

Exercice 6. Somme des racines carrées

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$$

2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-\frac{3}{2}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Correction.

1. Raisonnons par récurrence et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$P_n : \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$$

<u>Initialisation :</u> Soit $n = 1$, alors on a $\sum_{k=1}^{1} \sqrt{k} = 1$, $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{1} = 1$ et $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1} = \frac{7}{6}$. Comme $1 \leq 1 \leq \frac{7}{6}$, P_1 est vraie.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1}. En utilisant P_n, on a

$$\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} + \sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n} + \sqrt{n+1}.$$

Il nous reste donc à montrer les deux inégalités suivantes :

$$\left(\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$
$$\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}.$$

Pour la première inégalité, par équivalence, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\\
\iff\ &\left(\frac{2n}{3}+1\right)\sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\\
\iff\ &\frac{2n}{3}\sqrt{n+1} \leq \frac{(2n+1)}{3}\sqrt{n}\\
\iff\ &\frac{4n^2(n+1)}{9} \leq \frac{(2n+1)^2 n}{9}\\
\iff\ &0 \leq \frac{4n^3+4n^2+n-(4n^3+4n^2)}{9}\\
\iff\ &0 \leq \frac{n}{9},
\end{aligned}$$

et comme la dernière inégalité est toujours vraie, on a montré la première des inégalités cherchées.
De même, pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}\\
\iff\ &\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \leq \left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}\\
\iff\ &\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n} \leq \left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\\
\iff\ &\frac{(4n+3)^2 n}{36} \leq \frac{(4n+1)^2(n+1)}{36}\\
\iff\ &0 \leq \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

et comme la dernière inégalité est toujours vraie, on a montré la deuxième des inégalités cherchées.
Ainsi, P_{n+1} est vraie.
On en conclue que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

2. On utilise le théorème des gendarmes en remarquant que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}+\frac{1}{3n}=\frac{2}{3}\\
\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}$.