Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Feuille 0 : Révisions avant le premier Cours Magistral

Objectifs	**OUI**	**NON**
Savoir manipuler les valeurs absolues		
Savoir manipuler des max/min		
Savoir utiliser la définition de limite d'une suite		
Savoir manipuler les racines n-ièmes		

Exercice 1. Valeurs absolues (rappels)

1. Montrer que pour tous réels x et y, $|xy| = |x||y|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y, on a l'inégalité triangulaire
$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$
et étudier le cas d'égalité.
3. Montrer que pour tous réels x et y, on a la deuxième inégalité triangulaire
$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x-y|,$$
et étudier le cas d'égalité.
4. Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$.
5. Même question que la précédente avec $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $B' = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$, où $|\cdot|$ désigne ici le module.

Exercice 2. Questions simples sur les max
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ et $Y = \{y_1, ..., y_n\} \subset \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition du maximum M d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_k| = |\lambda| \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.
3. Montrer que $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k + y_k| \leq \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| + \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |y_k|$.
4. A-t-on $\max\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} xy = \left(\max\limits_{x \in X} x\right)\left(\max\limits_{y \in Y} y\right)$?

Exercice 3. Manipuler les max et les min

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné ayant un maximum et un minimum. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\max_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \max A - \min A.$$

Dans la suite, on notera $\beta = \max A$, $\alpha = \min A$ et $D = \{|x-y| : (x,y) \in A^2\}$.

1. Montrer que $\beta - \alpha$ est un majorant de D.
2. Soit M un majorant de D.
   (a) Montrer que pour tout $y \in A$, $\beta \leq M + y$.
   (b) En déduire que $\beta - \alpha \leq M$.
3. Conclure.

Exercice 4. Les suites... avec des ε

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que $(\sqrt[n]{|u_n|})_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $\ell \in [0,1[$, alors $(u_n)_n$ tend vers 0.
   Indication : Montrer qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(|u_n|)_n$ tend vers $+\infty$.
   Indication : Montrer qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.
3. Montrer que si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire en général.
   Indication : On pourra considérer la suite $(u_n)_n$ *définie par* $u_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Racines n-ièmes et inégalités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Indication : Calculer $\left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

Exercice 6. Somme des racines carrées

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$$

2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.