Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de Printemps 2023–2024**

L2 UE : Analyse 4

Séance de Soutien du 08/03/2024 - Préparation au CP

Eléments de réponses

Attention : les corrections ne sont pas détaillées/rédigées, mais les explications données doivent suffir pour que vous puissiez résoudre vous-même les exercices.

Exercice 1 Définition d'une norme

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2$ et $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(x, y) = |ax + by| + |cx + dy|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Indice/Réponse : le système $ax + by = 0$ et $cx + dy = 0$ admet uniquement $(x, y) = (0, 0)$ comme solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$, ce qui assure la séparation. Les autres propriétés d'une norme se démontrent facilement.

Exercice 2 Normes et boules

Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2|x| + 3|y| + |z|$. On admet que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$ (c'est un exercice facile). Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \forall r > 0, \quad B_{\|\cdot\|_1}(X, r) \subset B_N(X, 3r) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(X, 3r),$$

où B_N, $B_{\|\cdot\|_1}$ et $B_{\|\cdot\|_\infty}$ désignent les boules ouvertes pour les normes N, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

Indice/Réponse : Il suffit de montrer que, pour tout $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_1 \leqslant N(X) \leqslant 3\|X\|_1.$$

Et donc en particulier $\|X\|_\infty \leqslant N(X) \leqslant 3\|X\|_1$. Pour $X \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$ fixés, si $Y \in B_{\|\cdot\|_1}(X, r)$, alors $\|Y - X\|_1 < r$ et donc $N(X - Y) < 3r$ ce qui veut dire que $Y \in B_N(X, 3r)$, et ainsi $\|X - Y\|_\infty < 3r$ et donc $Y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(X, 3r)$, d'où le résultat.

Exercice 3 Ensemble ni ouvert ni fermé

Montrer que l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leqslant 1, y > -1\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Indice/Réponse : L'ensemble B est en fait la boule unité pour la norme infinie (le carré de côté 1 centré en $(0, 0)$ avec les côtés parallèles aux axes, sans son côté inférieur. Il est donc facile de trouver une suite $\{(x_k, y_k)\}_k \subset B$ (à justifier !) qui converge vers, par exemple, le point $(0, -1) \notin B$ (qui est sur ce côté inférieur, à justifier !), donc B n'est pas fermé. Il est aussi facile de montrer que toute boule ouverte centrée en $(0, 1) \in B$ (à justifier !) ne peut pas être incluse dans B, car $(0, 1 + \frac{r}{2}) \in B((0, 1), r)$ mais n'appartient pas à B (à justifier !), donc B n'est pas ouvert.

Exercice 4 **Ensemble ouvert**

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xye^{xy^2} > 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| < 10\}$.

Montrer que $A \cap C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Indice/Réponse : Il faut montrer que A et C sont ouverts, et donc $A \cap C$ le sera aussi comme réunion de deux ouverts. Pour A, il suffit de montrer que $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xye^{xy^2} \leqslant 1\}$ est un fermé. On utilise les suites, en prenant une suite de A^c qui converge. On passe à la limite en n'oubliant pas de dire que $(x, y) \mapsto xye^{xy^2}$ est continue, ce qui permet de conclure (les inégalités larges restent larges). De plus, $C = B_{\|\cdot\|_1}((1, 0), 10)$ qui est une boule ouverte, donc un ouvert.

Exercice 5 **Continuité d'une fonction**

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0, 0)$?

Indice/Réponse : Il suffit de se rendre compte que $f(x, x) \to +\infty$ quand $x \to 0$, avec $(x, x) \to (0, 0)$. Ainsi, f n'est pas continue.

Exercice 6 **Fonction continue**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   est continue.

   Indice/Réponse : Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, la fonction est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (le vérifier/l'écrire !). Pour la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$, on passe en coordonnées polaires et on majore facilement $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$ par $2r^3$ qui tend vers 0 quand $r \to 0$, d'où la continuité en $(0, 0)$.

2. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum sur E.

   Indice/Réponse : Il suffit de montrer que E est un compact de $\mathbb{R}^2$, comme f est une application continue, et d'utiliser le théorème des bornes atteintes de Weierstrass pour conclure. Pour démontrer que E est borné, il faut remarquer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$$

   et ainsi $(x, y) \in E$ implique que $\frac{3y^2}{4} \leqslant 1$ et $\frac{3x^2}{4}$ donc $|y| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $|x| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc E est borné. Pour montrer que E est fermé, c'est totalement classique : on prend une suite de E qui tend vers (x, y), on écrit ce que cela signifie, on passe à la limite par continuité de $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$ et on trouve que $(x, y) \in E$, ce qui montre que E est fermé.