Séance de Soutien du 08/03/2024 - Préparation au CP

Objectif : Travail de groupe ou individuel, questions, exercices de TD, exercices des CP de l'an dernier ou exercices de cette feuille.

Chapitres au Programme (CM+TD) : Normes, Topologie, Continuité.

Premièrement, il faut vous assurer que :

- vous avez correctement appris tous les résultats du cours, que rien ne vous a échappé,
- vous avez fait les exercices donnés en CM (vérifications, calculs) et compris les exemples,
- vous avez compris les questions/réponses données lors des Vrai/Faux,
- vous savez faire tous les exercices faits en TD **(4 points au CP)**.

Deuxièmement, voici les preuves et énoncés à connaître (4 points au CP).

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité
2. Caractérisation séquentielle d'un fermé
3. Toute boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée). Toute sphère est fermée.
4. Théorème de Heine-Borel (les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés-bornés)
5. Théorème des bornes atteintes de Weierstrass

Troisièmement, voici d'autres exercices pour vous entraîner :

- CP1 2023 en entier,
- CP2 2023, Exercice 2 Partie I.

Exercice 1 Définition d'une norme

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2$ et $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(x, y) = |ax + by| + |cx + dy|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercices associés : TD1, Exercices 2 et 3.

Exercice 2 Normes et boules

Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2|x| + 3|y| + |z|$. On admet que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$ (c'est un exercice facile). Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \forall r > 0, \quad B_{\|\cdot\|_1}(X, r) \subset B_N(X, 3r) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(X, 3r),$$

où B_N, $B_{\|\cdot\|_1}$ et $B_{\|\cdot\|_\infty}$ désignent les boules ouvertes pour les normes N, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercices associés : TD1, Ex.4, Ex.7.

Exercice 3 Ensemble ni ouvert ni fermé

Montrer que l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leqslant 1, y > -1\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercices associés : TD2, Ex.2, questions 3, 8, 10, 15, 16.

Exercice 4 **Ensemble ouvert**

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xye^{xy^2} > 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| < 10\}$.

Montrer que $A \cap C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercices associés : TD2, Ex.1, Ex.2 (questions 14).

Exercice 5 **Continuité d'une fonction**

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercices associés : TD3, Ex.1, Ex.4 (questions 2, 3, 4, 7), Ex.5 (question 3).

Exercice 6 **Fonction continue**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   est continue.

2. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum sur E.

Exercices associés : TD 2, Ex.2 (question 13) ; TD3, Ex.4 (questions 1, 5, 6), Ex.5 (questions 1, 2, 4, 5), Ex.6 (question 4), Ex. 7.