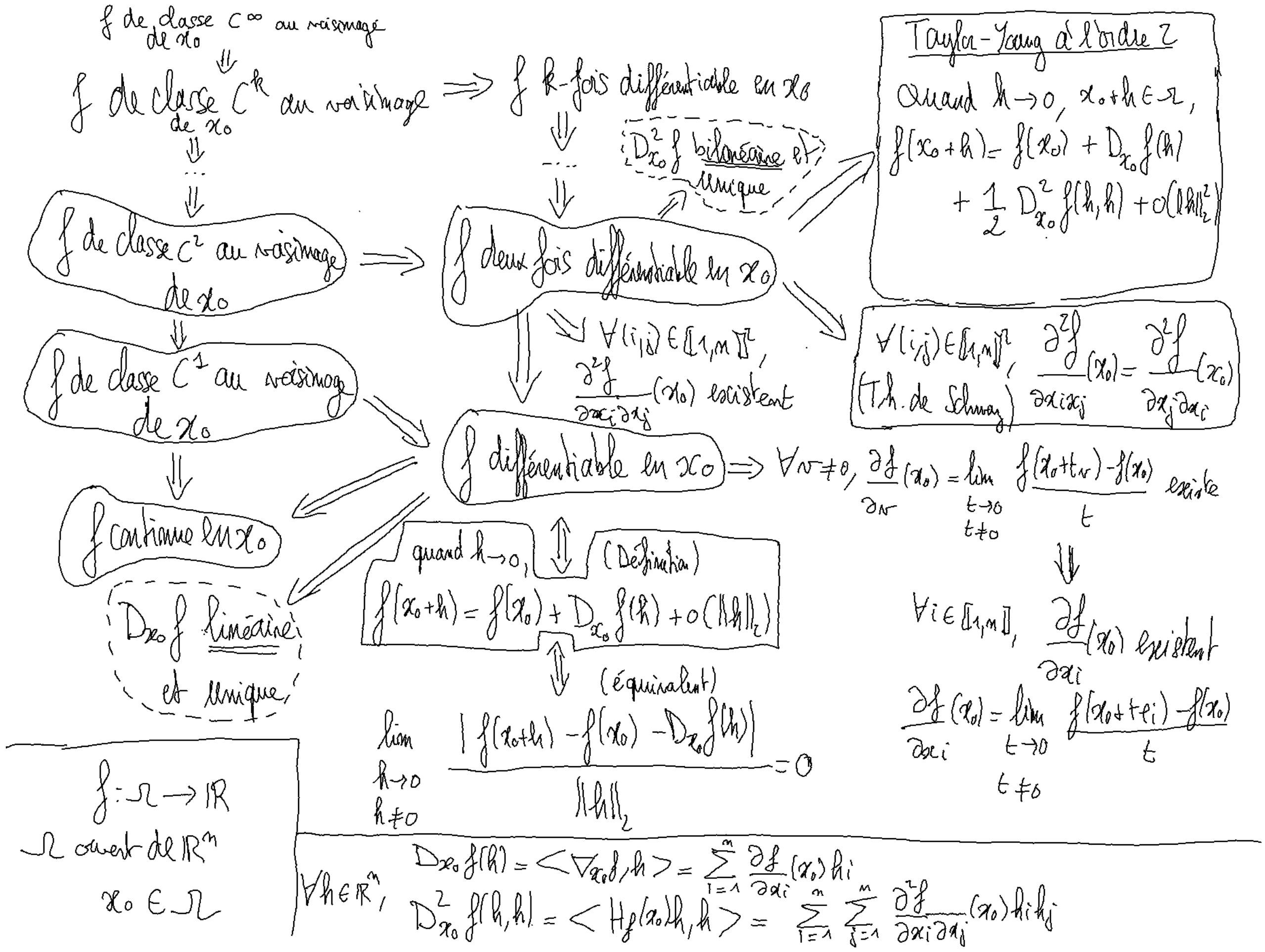
Résumé sur la différentiabilité et les fonctions de classe C^k (Analyse 4, L. Bétermin)



Dans toute la suite, on considèrera une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et un point $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour montrer que f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) :

- Evidemment, si f est dérivable par rapport à ses variables au point $(x_0, y_0$ il suffit de calculer directement les dérivées partielles (formules de dérivations usuelles).
- Si on n'a pas accès directement aux dérivées partielles, on utilise tout simplement la définition en terme de limite du taux d'accroissement.
  Rédaction. Pour tout $h \neq 0$, on a
  $$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \ell_1 \quad \text{quand } h \to 0,$$
  donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \ell_1$. De même, on a, pour tout $k \neq 0$,
  $$\frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \ell_2 \quad \text{quand } k \to 0,$$
  donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \ell_2$.

Pour montrer que f est/n'est pas différentiable en (x_0, y_0) :

- Evidemment, si f est une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions différentiables, alors elle est différentiable en (x_0, y_0).
- Si on ne peut pas utiliser l'argument précédent, il faut vérifier que f admet des dérivées partielles, en déduire la forme éventuelle de la différentielle et utiliser la définition pour vérifier la différentiabilité.
  Rédaction : On vérifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \ell_1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \ell_2$ comme au point précédent. Ainsi, pour tout $(h,k) \neq (0,0)$, on a
  $$\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \ell_1 h - \ell_2 k|}{\|(h,k)\|_2} \leq \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow 0 \quad \text{quand } (h,k) \to (0,0).$$

Ainsi, par comparaison, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\ell_1 h-\ell_2 k|}{\|(h,k)\|_2} = 0$ *et donc f est différentiable en (x_0,y_0) et*

$$D_{(x_0,y_0)}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (h,k) \mapsto \ell_1 h + \ell_2 k.$$

- Pour montrer que f n'est pas différentiable en (x_0,y_0), on a trois choix :
  1. montrer que f n'est pas continue en (x_0,y_0),
  2. montrer qu'une des dérivées partielles de f n'existe pas (un des taux de variations du point précédent n'a pas de limite finie),
  3. montrer que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\ell_1 h-\ell_2 k|}{\|(h,k)\|_2} \neq 0.$

Pour montrer que f est/n'est pas de classe C^1 au voisinage de (x_0,y_0) :

- Evidemment, si f est une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions de classe C^1 au voisinage de (x_0,y_0), alors elle est de classe C^1 au voisinage de (x_0,y_0).
- Si on ne peut pas utiliser l'argument précédent, il faut vérifier que les dérivées partielles premières de f sont continues en (x_0,y_0).
  Rédaction. Pour tout $(x,y)\neq(x_0,y_0)$, on a :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \text{ simplifier, calculer...}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \text{ simplifier, calculer...}$$

  De plus, on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \ell_1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \ell_2$ comme au premier point. Ainsi, pour tout $(x,y)\neq(x_0,y_0)$, on a

  $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\ell_1\right| \leq \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } (x,y)\to(x_0,y_0)$$

  et, de même

  $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\ell_2\right| \leq \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } (x,y)\to(x_0,y_0),$$

  donc les dérivées partielles de f sont continues en (x_0,y_0), donc f est de classe C^1 au voisinage de (x_0,y_0).
- Pour montrer que f n'est pas de classe C^1 au voisinage de (x_0,y_0), on a trois choix :
  1. montrer que f n'est pas continue en (x_0,y_0),
  2. montrer que f n'est pas différentiable en (x_0,y_0),
  3. montrer que les dérivées partielles de f ne sont pas continue en (x_0,y_0).

Pour montrer que f admet des dérivées partielles secondes en (x_0,y_0) :

- Evidemment, si f est une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions deux fois différentiables, alors elle est deux fois différentiable en (x_0,y_0) et admet donc des dérivées partielles secondes en ce point.
- Si on ne peut pas utiliser l'argument précédent, on étudie la limite des taux de variations.
- *Rédaction. Pour tout $h\neq 0$ et tout $x\neq 0$, on a*

  $$\frac{f(x_0+x+h,y_0)-f(x_0+x,y_0)}{h} = \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+x,y_0)$$

  quand $h\to 0$, et ainsi,

  $$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{x} = \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

  quand $x\to 0$. De même, pour tout $k\neq 0$, et tout $y\neq 0$, on a

  $$\frac{f(x_0,y_0+y+k)-f(x_0,y_0+y)}{k} = \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+y)$$

  quand $k\to 0$, et ainsi

  $$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{y} = \text{ simplifier, calculer...} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

quand $y \to 0$*. De même, pour tout* $k \neq 0$ *et tout* $x \neq 0$*, on a*

$$\frac{f(x_0+x, y_0+k) - f(x_0+x, y_0)}{k} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+x, y_0)$$

quand $k \to 0$*, et ainsi*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

quand $x \to 0$*. Enfin, de la même façon, pour tout* $h \neq 0$ *et pour tout* $y \neq 0$*,*

$$\frac{f(x_0+h, y_0+y) - f(x_0, y_0+y)}{h} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+y)$$

quand $h \to 0$*, et ainsi*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{y} = \text{ simplifier, calculer... } \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

quand $y \to 0$*.*

Pour montrer que f est de classe C^2 au voisinage de (x_0, y_0) :

- Evidemment, si f est une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions de classe C^2 au voisinage de (x_0, y_0), alors elle est de classe C^2 au voisinage de (x_0, y_0).
- Si on ne peut pas utiliser l'argument précédent, il faut vérifier que les dérivées partielles premières et secondes de f sont continues en (x_0, y_0).
  1. Pour montrer que les dérivées partielles premières de f sont continues au voisinage de (x_0, y_0), cf. le point sur les fonctions C^1.
  2. Pour montrer que les dérivées partielles secondes de f sont continues au voisinage de (x_0, y_0), calculer les dérivées partielles secondes en (x_0, y_0) comme au point précédent, les calculer directement (formules de dérivation) aux points $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, puis montrer la continuité $((x, y) \to (x_0, y_0))$.

Pour montrer que f est/n'est pas deux fois différentiable en (x_0, y_0) :

- Evidemment, si f est une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions deux fois différentiables, alors elle est deux fois différentiable en (x_0, y_0).
- Si on ne peut pas utiliser l'argument précédent, on peut passer par la définition en calculant le bon candidat L (linéaire) pour la différentielle ET la différentielle seconde Φ (bilinéaire) et montrer que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - L(h, k) - \Phi((h, k), (h, k))|}{\|(h, k)\|_2^2} = 0,$$

  ou bien (plus simplement) montrer que f est de classe C^2 au voisinage de (x_0, y_0).
- Pour montrer que f n'est pas deux fois différentiable en (x_0, y_0), on peut :
  1. montrer que f n'est pas continue en (x_0, y_0),
  2. montrer que f n'est pas différentiable en (x_0, y_0),
  3. montrer que la limite précédente ne vaut pas 0 (plus rare !),
  4. montrer que f ne vérifie pas le théorème de Schwarz, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Pour déterminer/utiliser le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f au point (x_0, y_0) :

- La fonction f étant deux fois différentiable en (x_0, y_0), il suffit de calculer les dérivées partielles 1ères et 2ndes de f en (x_0, y_0) et ainsi, quand $(h, k) \to (0, 0)$,

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

- De plus, si f est deux fois différentiable et

$$f(x_0+h, y_0+k) = a_1 + a_2 h + a_3 k + a_4 h^2 + a_5 k^2 + a_6 hk + o(h^2+k^2)$$

  quand $(h, k) \to (0, 0)$, alors, par unicité des différentielles premières et secondes : $a_1 = f(x_0, y_0)$, $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $a_3 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $a_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $a_5 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ et $a_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.