# 3 D'un lieu à l'autre : la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

## 3.1 Fonctions de plusieurs variables (exemples pour $(n, p) = (2, 1)$)

A partir de maintenant, nous allons considérer des fonctions de plusieurs variables qui sont assez difficiles à représenter graphiquement. Il est important de garder en tête le cas des fonctions de deux variables réelles $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En effet, celles-ci peuvent être représentées graphiquement dans un espace de dimension 3 muni d'un repère $(O; i, j, k)$ :

- l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ et peut donc être représenté comme un ensemble de point du plan ;
- habituellement, on représente le graphe de $f$, c'est-à-dire l'ensemble

  $$\mathscr{G}_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\right\}$$

  sous la forme d'une nappe/surface de $\mathbb{R}^3$ ;

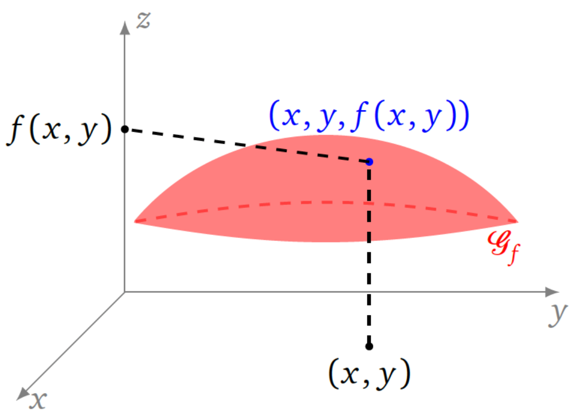


FIGURE 2 : Représentation d'un graphe $\mathscr{G}_f$

Par exemple, la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(1 + x + y)$ est définie sur l'ensemble

$$D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\},$$

et la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$ est définie sur l'ensemble

$$D_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \neq 0\}.$$

Ces ensembles de définitions sont représentés sur la figure 3.

La figure 4 présente trois exemples très simples de représentation graphiques de fonctions à deux variables.

Une fonction peut avoir un comportement assez compliqué, avec différents extrema locaux comme celle représentée sur la figure 5

On peut parfois revenir à l'étude d'une fonction à une seule variable réelle, en fixant par exemple $y = b$ (resp. $x = a$) et étudiant $x \mapsto f(x, b)$ (resp. $y \mapsto f(a, y)$) (cf. figure 6), ou en

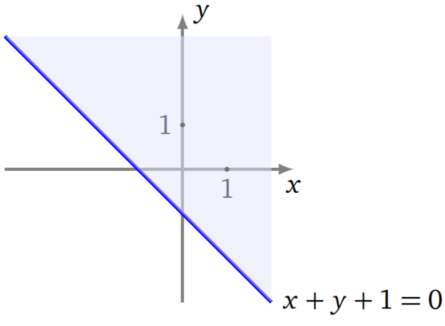


FIGURE 3 : Représentation graphique de $D_f$ (demi-plan bleu clair) et $D_g$ (en dehors de la parabole rouge)

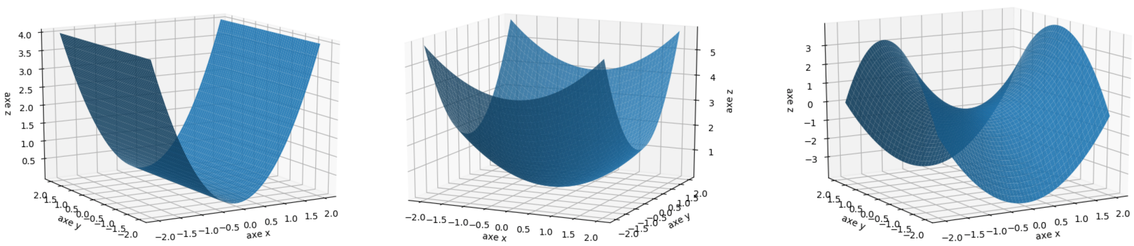


FIGURE 4 : Représentation graphique de $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

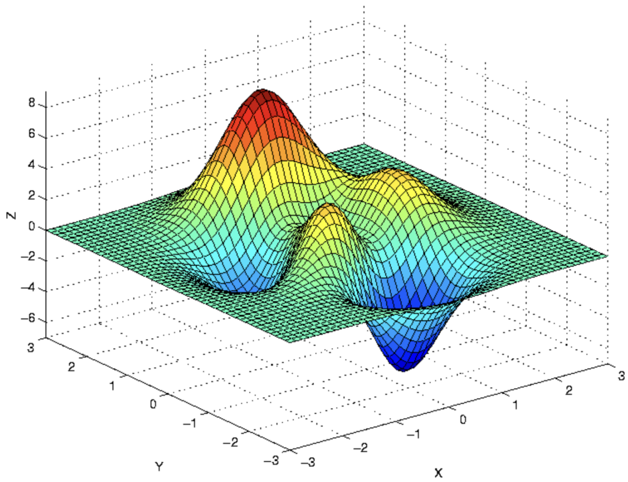


FIGURE 5 : Exemple de graphe avec des extrema locaux

suivant une autre courbe du plan $(x(t), y(t))$ (par exemple une autre droite) et en étudiant $t \mapsto f(x(t), y(t))$. Le nombre infini de ces courbes explique pourquoi il est si difficile d'étudier $f$ contrairement au cas des fonctions à une variable réelle. Une illustration est donnée sur la figure 7

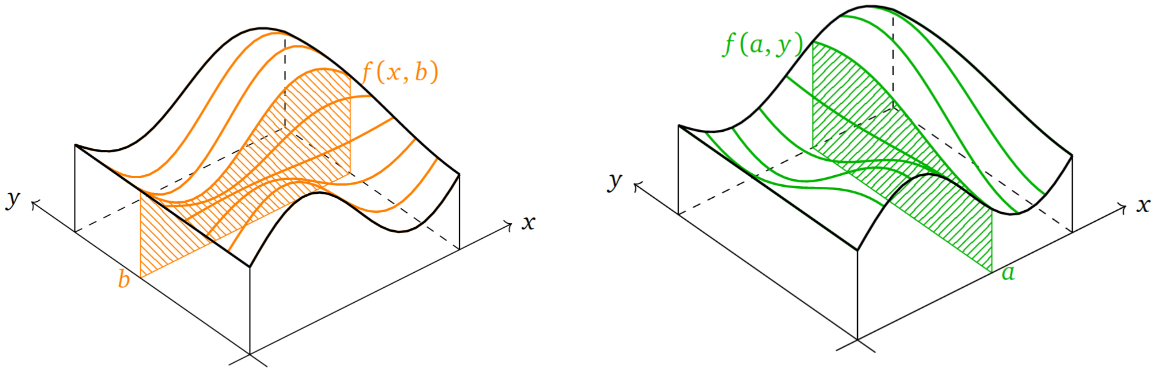


FIGURE 6 : Représentations en tranches du graphe d'une fonction de deux variables

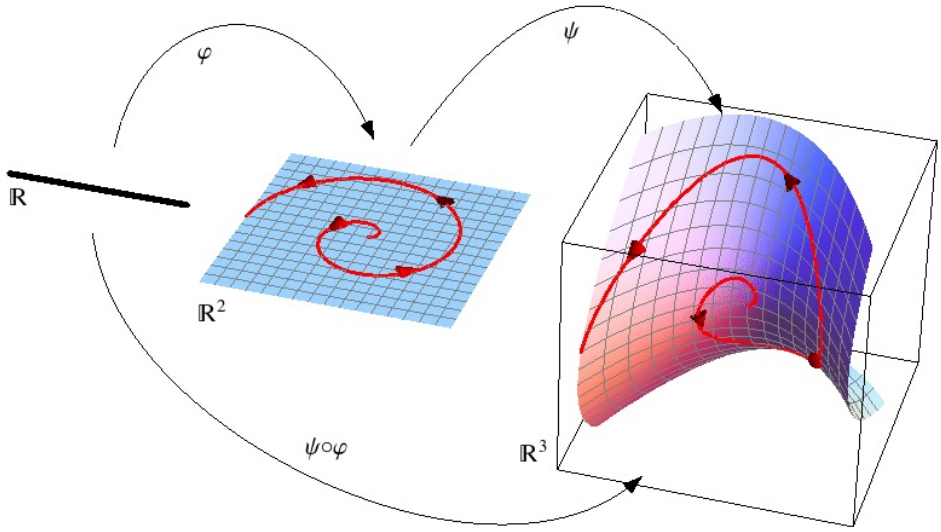


FIGURE 7 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (courbe, pas nécessairement une droite) et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(ou $\mathbb{R}$) (nappe/surface) alors $\psi \circ \varphi$ est une courbe sur la surface.

## 3.2 Limites d'une fonction

Les définitions suivantes généralisent celles vue sur $\mathbb{R}$ dans les cours précédents.

**Définition 3.1 (Limite d'une fonction en un point).** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $x_0$ un point adhérent à $E$. On dit que $f$ a pour limite $y_0 \in \mathbb{R}^m$ quand $x \to x_0$ dans $E$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\|_2 < \varepsilon$$

✎ **Remarque 3.2.** Il est facile (et formateur) de montrer que la définition de limite ne dépend pas