Université Claude Bernard Lyon 1 | UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Exercices supplémentaires à rendre (optionnels)

Les six exercices suivants correspondent à des exemples de questions “classiques" posées au cours des six chapitres du cours d'Analyse 4. Ces questions vous sont proposées principalement afin de vous entraîner à rédiger correctement.

Vous êtes donc invité.e.s à rendre ces exercices (un seul à la fois !) à n'importe quelle séance de Cours Magistral (ni en TD, ni par mail !) afin de bénéficier de conseils (rédaction, points à réviser, etc.).
Aucun corrigé ne sera distribué.

Exercice 1. Normes
Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = |2x + y| + |x - y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer sa boule unité fermée.

Exercice 2. Topologie
On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $A \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble et soient B, C et D les ensembles définis par

$$\begin{aligned}
B &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - 2y^2 + z^5 > 0\right\}\\
C &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\right\}\\
D &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists r > 0, B((x, y, z), r) \subset A\right\}.
\end{aligned}$$

Montrer que $(B \cup C) \cap D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Fonctions continues
Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 4. Différentiabilité
Déterminer l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante soit différentiable :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{[\sin(x + y)]^p}{\|(x, y)\|_2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 5. Fonctions de classe C^k
Etudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$, la différentiabilité et le caractère C^1 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 6. Extrema
Soit $K = [-10, 10]^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y(x + 3)$. Montrer que f admet un maximum sur K et déterminer ce maximum ainsi que le(s) point(s) où celui-ci est atteint.