Epreuve de rattrapage du 26/06/2023

Durée : 1h30

Le sujet est RECTO-VERSO

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.
Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Question de cours (3 points)

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F, alors F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Interprétation de la formule de Taylor-Young (4 points)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable telle que, quand $(h_1, h_2) \to (0, 0)$,

$$f(h_1, h_2 + 1) = -3h_2 + h_1 + 4h_1^2 + 4h_2^2 - h_1 h_2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

1. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement les dérivées premières et secondes de f, dont on donnera les valeurs, en un point (x_0, y_0) que l'on explicitera.
2. Montrer que la hessienne de f au point (x_0, y_0) est définie positive.
3. Vrai ou Faux : la fonction f admet un minimum local au point (x_0, y_0). Justifier.
4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(t) = (\ln(t^2 + 2) - \ln(3), t^3)$.
   Calculer $(f \circ \phi)'(1)$.

Exercice 3 Fonctions de classe C^k (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

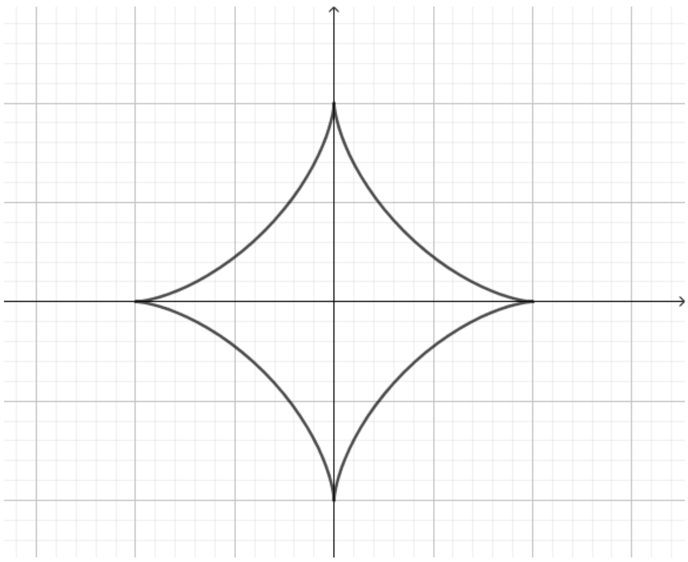
1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont égales.
3. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.
4. En déduire le plus grand ensemble, au sens de l'inclusion, sur lequel f est de classe C^2.

Exercice 4 Extrema sur un domaine (7 points)

On considère les ensembles O, A et K définis par

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} < 1\}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1\}$$
$$K = O \cup A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1\}$$

On admettra que O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. De plus, on admet que $A = \varphi([0, 2\pi])$ est l'astroïde paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. On a représenté A ci-dessous sans indication sur le repère choisi. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 8xy$.



1. Déterminer les points singuliers de l'astroïde A et montrer que sa longueur est 6.
2. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur K.
3. Déterminer la valeur du minimum et du maximum de f sur K ainsi que tous les points de K où f atteint ces valeurs.