Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 | UE : Analyse 4

Epreuve de rattrapage du 26/06/2023

Durée : 1h30

CORRECTION

Exercice 1 **Question de cours (3 points)**

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F, alors F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Correction. Montrons la contraposée de cette assertion, c'est-à-dire que si F n'est pas fermé, alors il existe une suite convergente d'éléments de F dont la limite n'appartient pas à F.

Supposons que F n'est pas fermé, alors F^c n'est pas ouvert et donc

$$\exists y \in F^c, \quad \exists (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*, \lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0, \text{ tels que } B(y, \varepsilon_k) \not\subset F^c.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in B(y, \varepsilon_k) \cap F$. La suite $(x_k)_k$ ainsi construite est une suite d'éléments de F qui converge vers $y \notin F$.

Exercice 2 **Interprétation de la formule de Taylor-Young (4 points)**

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable telle que, quand $(h_1, h_2) \to (0, 0)$,

$$f(h_1, h_2 + 1) = -3h_2 + h_1 + 4h_1^2 + 4h_2^2 - h_1h_2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

1. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement les dérivées premières et secondes de f, dont on donnera les valeurs, en un point (x_0, y_0) que l'on explicitera.

   Correction. La fonction f étant deux fois différentiable et sachant que $(h_1, h_2) \mapsto -3h_2 + h_1$ est linéaire et $(h_1, h_2) \mapsto 4h_1^2 + 4h_2^2 - h_1h_2$ est quadratique, ce développement est celui de Taylor-Young à l'ordre 2 de f au point $(x_0, y_0) = (0, 1)$ et on a, en notant $(x, y) \mapsto f(x, y)$,
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -3$;
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 8$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = -1$ par le théorème de Schwarz.

2. Montrer que la hessienne de f au point (x_0, y_0) est définie positive.

   Correction. La hessienne de f au point $(0, 1)$ est

   $$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

   de polynôme caractéristique $P(X) = (X-8)^2 - 1^2 = (X-9)(X-7)$ et donc les valeurs propres de $H_f(0,1)$ sont les racines $\{7, 9\}$ de P qui sont toutes les deux strictement positives. On en déduit que $H_f(0,1)$ est définie positive.

3. Vrai ou Faux : la fonction f admet un minimum local au point (x_0, y_0). Justifier.

   Correction. Faux. Comme $\nabla_{(0,1)} f = (1, -3) \neq 0$, le point $(0, 1)$ n'est pas un point critique, donc f n'admet pas de minimum local en ce point.

4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(t) = (\ln(t^2+2) - \ln(3), t^3)$.
Calculer $(f \circ \phi)'(1)$.
Correction. L'application ϕ est dérivable en $t = 1$ comme composée d'applications dérivables et on a
$$\phi'(1) = \left(\frac{2 \times 1}{1^2+2}, 3 \times 1^2\right) = \left(\frac{2}{3}, 3\right).$$
Ainsi, comme f est différentiable au point $\phi(1) = (0,1)$, l'application $f \circ \phi$ est dérivable en 1 et sa dérivée est donnée par
$$(f \circ \phi)'(1) = D_{\phi(1)} f(\phi'(1)) = D_{(0,1)} f\left(\frac{2}{3}, 3\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \times \frac{2}{3} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \times 3 = 1 \times \frac{2}{3} - 3 \times 3 = -\frac{25}{3}.$$

Exercice 3 **Fonctions de classe C^k (6 points)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Correction. Tout d'abord, il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Etudions le caractère C^1 de f en $(0,0)$. Pour cela, on montre que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$
On a donc
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$
quand $(x,y) \to (0,0)$, et
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2|y|^3(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{4\sqrt{x^2+y^2}^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$
quand $(x,y) \to (0,0)$. Reste à calculer, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{k^2}{k} = k$$
qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On a donc montré que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
et donc que les dérivées partielles premières de f sont continues en $(0,0)$. Cela montre que f est de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
Correction Calculons, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = 0, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

3. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.
   Correction. Calculons, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

   et on a donc, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,x) = \frac{-8x^6}{(2x^2)^3} = -1$$

   qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. On en déduit donc que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

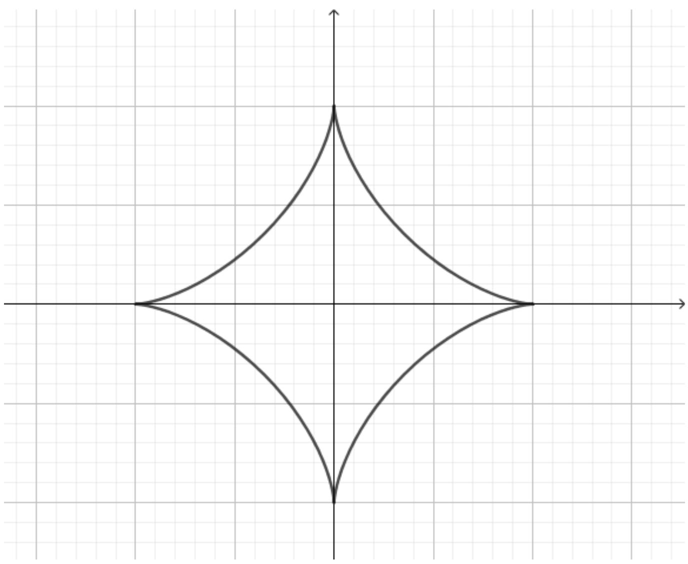
4. En déduire le plus grand ensemble, au sens de l'inclusion, sur lequel f est de classe C^2.
   Correction. La fonction f est clairement de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$, f n'est pas de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$, donc le plus grand ensemble sur lequel f est de classe C^2 est $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 4 Extrema sur un domaine (7 points)

On considère les ensembles O, A et K définis par

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} < 1\}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1\}$$
$$K = O \cup A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1\}$$

On admettra que O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. De plus, on admet que $A = \varphi([0, 2\pi])$ est l'astroïde paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. On a représenté A ci-dessous sans indication sur le repère choisi. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 8xy$.



1. Déterminer les points singuliers de l'astroïde A et montrer que sa longueur est 6.
   Correction. On calcule
   $$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \varphi'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)).$$
   Déterminons l'ensemble des points singuliers de cette courbe paramétrée :
   $$\varphi'(t) = 0 \iff \cos^2(t)\sin(t) = \sin^2(t)\cos(t) = 0 \iff \cos(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(t) = 0,$$
   si et seulement si $t = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire si $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Par symétrie, de cos (qui est pair) et sin (qui est impair), la longueur totale de la courbe est la somme des longueurs des 4 portions de courbes $\varphi(]0, \pi/2[)$, $\varphi(]\pi/2, \pi[)$, $\varphi(]\pi, 3\pi/2[)$ et $\varphi(]3\pi/2, 2\pi[)$ où la courbe paramétrée est régulière. Ainsi, la longueur de la courbe est
   $$\begin{aligned}\ell(\mathcal{A}) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\varphi'(t)\|dt &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)}dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)\cos(t)|\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)dt \\ &= 6\left[\sin^2(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6.\end{aligned}$$

2. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur K.
   Correction. Montrons que K est un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in K$, alors on a
   $$\sqrt[3]{x^2} \leqslant \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1, \text{ et } \sqrt[3]{y^2} \leqslant \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1$$
   ce qui implique que $x^2 \leqslant 1$ et $y^2 \leqslant 1$ et donc $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$. Cela montre que K est borné dans $\mathbb{R}^2$. De plus, soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers (x, y). Alors on a,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{y_n^2} \leqslant 1.$$
   Comme la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, on obtient, quand $n \to +\infty$,
   $$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1,$$
   ce qui veut dire que $(x, y) \in K$. Ainsi, K est un fermé de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Heine-Borel, K est donc un compact comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions continues, donc d'après le théorème de Weierstrass, f atteint ses bornes sur le compact K, donc y admet un minimum et un maximum.

3. Déterminer la valeur du minimum et du maximum de f sur K ainsi que tous les points de K où f atteint ces valeurs.
   Correction. On montre facilement que l'ensemble O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en considérant son complémentaire $O^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \geq 1\}$ et en montrant que c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en utilisant les suites et la continuité de $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$ sur $\mathbb{R}$ comme à la question précédente. Déterminons les points critiques de f sur O. Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ on peut calculer son gradient en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$\nabla_{(x,y)} f = (8y, 8x)$$

et on trouve que $\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff 8x = 8y = 0 \iff x = y = 0$. Le seul point critique de f est $(0,0) \in O$ car $\sqrt[3]{0^2} + \sqrt[3]{0^2} = 0 < 1$. La hessienne de f au point $(0,0)$ est donc

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

de polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - 8^2 = (X-8)(X+8)$ qui s'annule en 8 et -8 qui sont donc les valeur propres de la matrice. Comme elles sont de signes opposés, on en déduit que $(0,0)$ est un point-selle de f.

Il reste à étudier les extrema de f sur A. On calcule donc, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(\phi(t)) = f(\cos^3 t, \sin^3 t) = 8(\cos t \sin t)^3 = 8\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^3 = \sin^3(2t).$$

Cette quantité atteint

- son maximum quand $\sin(2t) = 1$, c'est-à-dire si $2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et donc si $t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$, c'est-à-dire aux points

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \text{ et } \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

  Comme f n'admet pas de minimum ou de maximum local sur O, alors le maximum de f sur K est $1^3 = 1$ atteint en ces points.

- son minimum quand $\sin 2t = -1$, c'est-à-dire si $2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et donc si $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à $t \in \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, c'est-à-dire aux points

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \text{ et } \varphi\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

  Comme f n'admet pas de minimum ou de maximum local sur O, alors le minimum de f sur K est $(-1)^3 = -1$ atteint en ces points.