Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 — UE : Analyse 4

Contrôle Terminal du 12/05/2023

Durée : 2h

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Question de cours (3 points)

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, O un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in O$ et $f : O \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable.

Donner la preuve vue en cours de l'unicité de la différentielle de f en x_0.

Correction.

Supposons qu'il existe deux applications linéaires L_1 et L_2 satisfaisant, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0+h \in O$ et $h \to 0$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_1(h) + o(\|h\|_2)$$
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_2(h) + o(\|h\|_2).$$

Cela implique que $L_1(h) - L_2(h) = o(\|h\|_2)$. En particulier, pour $h = tx$ où $t \in \mathbb{R}$ et $x \in O\backslash\{0\}$, on obtient, par linéarité, quand $t \to 0$,

$$L_1(tx) - L_2(tx) = t(L_1 - L_2)(x) = o(\|tx\|) = o(|t|).$$

Ainsi, pour tout $x \in O\backslash\{0\}$, $(L_1 - L_2)(x) = o(1)$ quand $t \to 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to 0} \|(L_1 - L_2)(x)\| = 0.$$

Or il est clair que $(L_1 - L_2)(x)$ ne dépend pas de t et il en découle que $(L_1 - L_2)(x) = 0$ pour tout $x \in O\backslash\{0\}$, ce qui veut dire que $L_1(x) = L_2(x)$ pour tout $x \in O\backslash\{0\}$ et donc, par linéarité, pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Comme l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$, on en déduit que $L_1 = L_2$, d'où l'unicité de la différentielle.

Exercice 2 Interprétation de la formule de Taylor-Young (3 points)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable telles que, quand $(h_1, h_2) \to (0, 0)$,

$$f(h_1, h_2) = 2 + h_1 - 2h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$
$$g(1 + h_1, -3 + h_2) = -1 + h_1^2 + h_2^2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

1. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement les dérivées premières de f en un point que l'on explicitera.

   Correction. Comme f est différentiable et $(h_1, h_2) \mapsto h_1 - 2h_2$ est linéaire, on obtient, par unicité de la différentielle,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -2.$$

2. Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement le gradient et les dérivées secondes de g en un point (x_0, y_0) que l'on explicitera.

Correction. On a $(x_0, y_0) = (1, -3)$. Comme g est deux fois différentiable, on a

$$\nabla_{(1,-3)} g = (0, 0),$$

et comme $(h_1, h_2) \mapsto h_1^2 + h_2^2$ est une forme quadratique, on a, par unicité de la différentielle seconde,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, -3) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, -3) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, -3) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1, -3) = 0.$$

3. (a) Montrer que la hessienne de g au point (x_0, y_0) est définie positive.

Correction. La hessienne de g au point $(1, -3)$ est $H_g(1, -3) = 2I_2$ dont l'unique valeur propre est $2 > 0$. On en déduit que $H_g(1, -3)$ est définie positive.

(b) Que peut-on en déduire à propos du point (x_0, y_0) ?

Correction. Comme $(1, -3)$ est un point critique de g et que la hessienne de g en ce point est définie positive, on en déduit que $(1, -3)$ est un minimum local de g.

Exercice 3 L'exemple de Peano (5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Correction. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.

2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et déterminer leurs valeurs.

Correction. Pour tout $h \neq 0$, on a $f(h, 0) = f(0, h) = 0$ et donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Ainsi, les dérivées premières de f au point $(0, 0)$ existent et sont nulles.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, f est de classe C^1 sur cet ensemble. Montrons maintenant que f est de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$. Pour cela, on calcule, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on a, en utilisant le fait que $|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leqslant \frac{x^4 |y| + 4x^2 |y|^3 + |y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant \frac{6\sqrt{x^2 + y^2}^5}{(x^2 + y^2)^2} = 6(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leqslant \frac{|x|^5 + 4|x|^3 y^2 + |x| y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant \frac{6\sqrt{x^2 + y^2}^5}{(x^2 + y^2)^2} = 6(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Par comparaison, comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 6(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, on obtient par comparaison que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

et donc les dérivées partielles premières de f sont continues en $(0,0)$, et ainsi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent et déterminer leurs valeurs.

Correction. Soit $h \neq 0$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -h, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = h,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{-h}{h} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\\
\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h}{h} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).
\end{aligned}$$

5. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Correction. D'après le théorème de Schwarz, comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, f n'est pas de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$, donc n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Extrema sur un domaine (6 points)

On considère les ensembles A, E et K définis par

$$\begin{aligned}
&A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 4\}, \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4\}\\
&K = A \cup E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leqslant 4\}
\end{aligned}$$

De plus, on admet que $E = \varphi([0,2\pi])$ est l'ellipse paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = (\cos t, 2\sin t)$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4x^2 - 5xy + y^2$.

1. Montrer, en utilisant les suites, que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et K un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Correction. Le complémentaire de A est $A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 4\}$. Soit $\{(x_n,y_n)\}_n$ une suite d'éléments de A^c qui converge vers (x,y). Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4x_n^2 + y_n^2 \geq 4.$$

Comme la fonction $(x,y) \mapsto 4x^2 + y^2$ est polynômiale, donc continue, on obtient en passant à la limite, que

$$\lim_{n\to+\infty} 4x_n^2 + y_n^2 = 4x^2 + y^2 \geq 4,$$

ce qui prouve que $(x,y) \in A^c$, et donc que A^c est un fermé de $\mathbb{R}^2$. On obtient donc que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De même, soit $\{(x_n,y_n)\}_n$ une suite d'éléments de K qui converge vers (x,y). On obtient donc que

$$\lim_{n\to+\infty} 4x_n^2 + y_n^2 = 4x^2 + y^2 \leqslant 4,$$

c'est-à-dire que $(x,y) \in K$, et donc K est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer des réels $M > 0$ et $N > 0$ tels que, pour tout $(x, y) \in K$, $|x| \leqslant M$ et $|y| \leqslant N$.

Correction. Soit $(x, y) \in K$, alors on a d'une part, comme $y^2 \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$4 \geq 4x^2 + y^2 \geq 4x^2,$$

et donc $x^2 \leqslant 1$, ce qui implique que $|x| \leqslant 1$, et d'autre part, comme $4x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4 \geq 4x^2 + y^2 \geq y^2,$$

et donc $|y| \leqslant 2$.

3. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur K.

Correction. La fonction f est polynomiale, donc continue. De plus, K est fermé d'après la question 1., et borné d'après la question précédente. D'après le théorème de Heine, K est donc un compact de $\mathbb{R}^2$, et ainsi, d'après le théorème de Weierstrass, f étant continue sur un ensemble compact, elle y atteint son maximum et son minimum.

4. Déterminer le ou les extrema éventuels de f sur A.

Correction. Sur l'ouvert A, déterminons les points critiques de $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, car polynomiale, c'est-à-dire les points (x, y) vérifiant

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x - 5y, \quad \text{et} \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 5x.$$

La première équation nous donne $x = \frac{5}{8}y$ et ainsi, en remplaçant dans la deuxième équation, on obtient $2y - \frac{25}{8}y = 0$, c'est-à-dire $-\frac{9}{8}y = 0$, donc $y = 0$, et ainsi $x = 0$.

Alternativement : Le déterminant de ce système linéaire vaut $8 \times 2 - (-5)^2 = -9 \neq 0$, *donc l'unique solution du système est* $(0, 0)$.

Le seul point critique de f est donc $(0, 0)$. Comme $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale, les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -5.$$

La hessienne au point $(0, 0)$ est donc

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

de polynôme caractéristique

$$P(X) = \det(XI_2 - H_f(0, 0)) = (X - 8)(X - 2) - 5^2 = X^2 - 10X - 9.$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = (-10)^2 - 4(1)(-9) = 100 + 36 = 136 > 0$, donc les deux valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont

$$X_1 = \frac{10 + \sqrt{136}}{2}, \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{10 - \sqrt{136}}{2}.$$

Il est clair que $X_1 > 0$. Comme $10^2 = 100 < 136$, on a $X_2 < 0$, donc $(0, 0)$ est un point-selle de f.

5. (a) Montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $f(\cos t, 2 \sin t) = 4 - 5 \sin(2t)$.

Correction. Soit $t \in [0, 2\pi]$, alors $f(\cos t, 2 \sin t) = 4 \cos^2 t - 10 \cos t \sin t + 4 \sin^2 t$. Comme $4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4$ on a donc, en utilisant le fait que $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$,

$$f(\cos t, 2 \sin t) = 4 - 10 \cos t \sin t = 4 - 5 \sin 2t.$$

(b) En déduire les extrema de f sur E.

Correction. Tout point de E s'écrit $\varphi(t)$ et comme $f(\varphi(t)) = 4 - 5\sin 2t$, f est

- minimale sur E si $\sin 2t = 1$, c'est-à-dire si $2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et donc si $t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$, c'est-à-dire aux points

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right),$$

en lesquels la fonction vaut $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = 4 - 5 = -1$.

- maximale sur E si $\sin 2t = -1$, c'est-à-dire si $2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et donc si $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à $t \in \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, c'est-à-dire aux points

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

en lesquels la fonction vaut $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 5 = 9$.

6. Déduire des questions 4. et 5. la valeur du minimum et du maximum de f sur K ainsi que tous les points de K où f atteint ces valeurs.

Correction. Comme f n'admet pas de minimum ni de maximum local sur A, alors ses extrema sur K sont sur E. On en déduit donc que le minimum de f vaut -1, atteint au points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$, et que son maximum vaut 9, atteint aux points $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Exercice 5 Arche de cycloïde et composée (3 points)

Soit $\mathcal{C} = \varphi([0, 2\pi])$ l'arche de cycloïde paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ a pour longueur 8.

Correction. Les points singuliers de f sont donnés par

$$\varphi'(t) = 0 \iff (1 - \cos t, \sin t) = (0, 0) \iff t \in \{0, 2\pi\}.$$

Sur $]0, 2\pi[$, φ est une paramétrisation régulière, et on a donc

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t dt} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t dt}.$$

On obtient donc, comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ pour tout $t \in]0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t dt} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t dt} \\ = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ = 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = F(\varphi(t)).$$

Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa différentielle en fonction des dérivées partielles de F.

Correction. Par hypothèse, F est différentiable, et comme $t \mapsto t - \sin t$ et $t \mapsto 1 - \cos t$ sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc différentiables, on en déduit que φ est aussi différentiable. Ainsi $g = F \circ \varphi$ est différentiable comme composée d'applications différentiables. On a donc $g(t) = F(t - \sin t, 1 - \cos t)$ et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = (1 - \cos t)\partial_1 F(\varphi(t)) + \sin t\, \partial_2 F(\varphi(t)).$$

Ainsi, la différentielle de g en $t \in \mathbb{R}$ est

$$D_t g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto D_t g(h) = [(1 - \cos t)\partial_1 F(\varphi(t)) + \sin t\, \partial_2 F(\varphi(t))]\, h$$