Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2023–2024**

L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Terminal Session 2 du Mardi 25/06/2024

Durée : 1h30

Attention : Le sujet est recto-verso !

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 **Question de cours (3 + 1 = 4 points)**

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

1. Montrer que la boule ouverte $B_{\|\cdot\|}(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. En supposant connu le fait que la boule fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, montrer que la sphère $S_{\|\cdot\|}(x, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 **Différentiabilité première et seconde (2 + 2 = 4 points)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
   Cette égalité permet-elle de conclure que f est deux fois différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 **Extrema (2 + 1.5 + 2 + 1.5 = 7 points)**

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leqslant 1\}$ dont le bord et l'intérieur sont définis par

$$\partial K = \{(x, 1-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\},$$
$$\mathring{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

De plus, on définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = xy(1-x-y)$.

1. Montrer que f atteint son maximum sur K.
2. Calculer $f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ et montrer que le maximum de f sur K n'est pas atteint sur ∂K.
3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f sur $\mathring{K}$ et en déduire la valeur du maximum de f sur K ainsi que le(s) point(s) où il est atteint.
4. On sait que le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage du point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ est, quand $(h,k) \to (0,0)$, pour un certain triplet de réels (a,b,c),
   $$f\left(\frac{1}{3} + h, \frac{1}{3} + k\right) = a + bh + ck - \frac{1}{3}\left(h^2 + k^2 + hk\right) + o(h^2 + k^2).$$
   Déduire des questions précédentes les valeurs de a, b et c, et donner l'expression de la hessienne de f au point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Tournez la page, il y a encore un exercice ! →

Exercice 4 **Maximum d'une fonction à trois variables (2 + 3 = 5 points)**

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = (x + 2y + 2z)^2$. On note $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 pour la norme euclidienne.

1. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in B$, $F(x, y, z) \leqslant 9$.
2. Montrer que le maximum de F sur B est 9, atteint exactement en deux points que l'on explicitera.