Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2023–2024**

L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Terminal Session 2 du Mardi 25/06/2024

CORRECTION

Exercice 1 **Question de cours (3 + 1 = 4 points)**

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

1. Montrer que la boule ouverte $B_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. En supposant connu le fait que la boule fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, montrer que la sphère $S_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $y \in B_{\|\cdot\|}(x,r)$, posons $\delta = r - \|x-y\|$, alors pour tout $z \in B_{\|\cdot\|}(y,\delta)$, on a
$$\|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| < \|x-y\| + \delta = r,$$
donc $z \in B_{\|\cdot\|}(x,r)$ et ainsi $B_{\|\cdot\|}(y,\delta) \subset B_{\|\cdot\|}(x,r)$, ce qui prouve que la boule ouverte $B_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. On a $S_{\|\cdot\|}(x,r) = \overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \backslash B_{\|\cdot\|}(x,r) = \overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \cap B_{\|\cdot\|}(x,r)^c$. Or $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $B_{\|\cdot\|}(x,r)$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$, son complémentaire est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Ainsi $S_{\|\cdot\|}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme interesection de deux fermés de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 **Différentiabilité première et seconde (2 + 2 = 4 points)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
Cette égalité permet-elle de conclure que f est deux fois différentiable en $(0,0)$?

Correction.

1. Il suffit de montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Tout d'abord, f étant différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables, f admet des dérivées partielles et on a
$$\forall (x,y) \neq (0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$
Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0$. De plus, pour tout $k \neq 0$,
$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^2}{k} = k \to 0$$

quand $k \to 0$, et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et ainsi,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant \frac{2|y|^3(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{4\sqrt{x^2+y^2}^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2} \to 0,$$

quand $(x,y) \to (0,0)$, ce qui veut dire, par comparaison, que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ et donc finalement sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculons, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{k^4}{h^2+k^2} - k^2}{h} = \lim_{h\to 0} -hk^2 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = 0, \text{ en utilisant directement l'expression de } \frac{\partial f}{\partial y},$$

et ainsi
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = 0, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

Cette égalité ne permet pas de conclure quant à la différentiabilité seconde de f en $(0,0)$.

<u>Exercice 3</u> Extrema (2 + 1.5 + 2 + 1.5 = 7 points)

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leqslant 1\}$ dont le bord et l'intérieur sont définis par

$$\partial K = \{(x, 1-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\}$$
$$\mathring{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x+y < 1\}.$$

De plus, on définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = xy(1-x-y)$.

1. Montrer que f atteint son maximum sur K.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et montrer que le maximum de f sur K n'est pas atteint sur ∂K.
3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f sur $\mathring{K}$ et en déduire la valeur du maximum de f sur K ainsi que le(s) point(s) où il est atteint.
4. On sait que le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage du point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est, quand $(h,k) \to (0,0)$, pour un certain triplet de réels (a,b,c),

$$f\left(\frac{1}{3}+h, \frac{1}{3}+k\right) = a + bh + ck - \frac{1}{3}\left(h^2+k^2+hk\right) + o(h^2+k^2).$$

Déduire des questions précédentes les valeurs de a, b et c, et donner l'expression de la hessienne de f au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Correction.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions continues. De plus, K est un compact de $\mathbb{R}^2$ comme fermé-borné de $\mathbb{R}^2$ d'après le Théorème de Heine car :
   - K est un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\{(x_k, y_k)\}_k \subset K$ une suite qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
   $$x_k \geq 0, \quad y_k \geq 0 \quad \text{et} \quad x_k + y_k \leqslant 1.$$
   En passant à la limite, par continuité, on obtient $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leqslant 1$, ce qui veut dire que $(x, y) \in K$, donc K est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
   - K est borné. En effet, pour tout $(x, y) \in K$, on a
   $$0 \leqslant x \leqslant x + y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant x + y \leqslant 1,$$
   ce qui prouve que $K \subset [0, 1]^2$, donc K est borné.

   Ainsi, d'après le Théorème de Weierstrass, f atteint ses bornes sur K, donc le maximum de f sur K est atteint.
2. On a $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$. Si $(x, y) \in \partial K$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = 1$, ce qui implique que $f(x, y) = 0$. Comme $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) > 0$, il est clair que le maximum de f sur K n'est pas 0 et n'est donc pas atteint sur ∂K.
3. Pour tout $(x, y) \in \mathring{K}$, on a
$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff (y - 2xy - y^2, x - 2yx - x^2) = (0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{l} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - 2y - x) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - 2y - x = 0 \end{array} \right.$$
car $x \neq 0$ et $y \neq 0$ puisque $(x, y) \in \mathring{K}$. D'après la première équation, on a $y = 1 - 2x$ et, en remplaçant dans la deuxième, on obtient $1 - 2(1 - 2x) - x = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{3}$, ce qui donne $y = 1 - 2x = \frac{1}{3}$. Ainsi, le seul point critique de f dans $\mathring{K}$ est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
On sait que le maximum de f sur K, qui existe d'après la question 1., n'est pas atteint sur ∂K. Il est donc atteint sur $\mathring{K}$ qui est un ouvert, donc f admet nécessairement un point critique en ce point. Comme $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est le seul point critique sur cet ensemble, le maximum de f est nécessairement atteint en ce point. Le maximum de f est donc
$$\max_{(x,y) \in K} f(x, y) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$
Alternativement : On peut calculer la hessienne de f au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Comme, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 - 2x - 2y,$$
on trouve $H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ de déterminant $\frac{1}{3} > 0$ et de trace $-\frac{4}{3} < 0$, donc f admet au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ un maximum local qui est donc aussi le maximum global puisqu'il n'y a pas d'autre maximum local atteint sur K.
4. Comme f est deux fois différentiable au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, par unicité des différentielles premières et secondes, on obtient :
   - $a = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$ d'après la question précédente,
   - $(b, c) = \nabla_{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} f = (0, 0)$ car $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un point critique de f,
   - La hessienne de f au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est $H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 4</u> **Maximum d'un fonction à trois variables (2 + 3 = 5 points)**

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = (x + 2y + 2z)^2$. On note $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 pour la norme euclidienne.

1. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in B$, $F(x, y, z) \leqslant 9$.
2. Montrer que le maximum de F sur B est 9, atteint exactement en deux points que l'on explicitera.

Correction.

1. Soit $(x, y, z) \in B$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ aux vecteurs $u = (1, 2, 2)$ et $v = (x, y, z)$ et on obtient

$$|x + 2y + 2z| = |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|_2\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

   Comme $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, on obtient $|x + 2y + 2z| \leqslant \sqrt{9}$ et en élevant au carré on obtient l'inégalité désirée, c'est-à-dire $F(x, y, z) \leqslant 9$.

2. Il suffit d'étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente. On a

$$\forall (x, y, z) \in B, F(x, y, z) = 9 \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. ,$$

   la première condition étant donnée par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De la première condition, on obtient que $y = z = 2x$ et, en remplaçant dans la deuxième équation, on obtient

$$x^2 + (2x)^2 + (2x)^2 = 1 \iff 9x^2 = 1 \iff x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

   Ainsi,
   - si $x = -\frac{1}{3}$, alors $y = z = 2x = -\frac{2}{3}$,
   - si $x = \frac{1}{3}$, alors $y = z = 2x = \frac{2}{3}$,

   et on conclut que le maximum de f sur B est 9 atteint aux points $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.