Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2023–2024**
L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Terminal du Mercredi 15/05/2024

Durée : 2h

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

<u>Exercice 1</u> Question de cours (4 points)

Enoncer et démontrer le résultat du cours donnant la condition suffisante du second ordre assurant l'existence d'un minimum local pour une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

Correction.

Enoncé : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{E}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en x_0. Si x_0 est un point critique de f et $D^2_{x_0} f$ est définie positive, alors f admet en x_0 un minimum local.

Preuve : Supposons que $D^2_{x_0} f$ soit définie positive. Les valeurs propres de la matrice hessienne $H_f(x_0)$ sont donc toutes strictement positives. Soit λ_1 la plus petite de ces valeurs propres, alors on sait que

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n : \|h\|_2 = 1} D^2_{x_0} f(h, h) = \lambda_1.$$

Or, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on a, avec ε une fonction de limite nulle quand $h \to 0$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} D^2_{x_0} f(h, h) + \|h\|_2^2 \varepsilon(h) = \|h\|_2^2 \left(\frac{1}{2} D^2_{x_0} f \left(\frac{h}{\|h\|_2}, \frac{h}{\|h\|_2} \right) + \varepsilon(h) \right).$$

par bilinéarité et le fait que $\nabla_{x_0} f = 0$ puisque x_0 est un point critique de f.

Ainsi, si $h \neq 0$ est suffisamment petit, $|\varepsilon(h)| \leqslant \frac{\lambda_1}{2}$ et donc, comme $\frac{h}{\|h\|_2} \in S_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \|h\|_2^2 \left(\frac{1}{2} D^2_{x_0} f \left(\frac{h}{\|h\|_2}, \frac{h}{\|h\|_2} \right) + \varepsilon(h) \right) \geq \|h\|_2^2 \left(\frac{1}{2} D^2_{x_0} f \left(\frac{h}{\|h\|_2}, \frac{h}{\|h\|_2} \right) - \frac{\lambda_1}{2} \right) \geq 0,$$

ce qui veut dire que f admet un minimum local en x_0.

<u>Exercice 2</u> Extrema (0.5 + 1.5 + 1.5 + 0.5 = 4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ et $K = [0, 1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Etudier les extrema de f sur le bord de K, défini par $\partial K := K \backslash]0, 1[^2$.
3. Etudier les extrema de f sur l'intérieur de K, défini par $\mathring{K} :=]0, 1[^2$.
4. Déduire des questions précédentes le minimum et le maximum de f sur K ainsi que le(s) point(s) où ils sont atteints.

Correction.

1. f est une fonction continue, car polynomiale et K est un compact par produit cartésien car $[0, 1]$ est compact (fermé borné dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Heine-Borel), donc d'après le théorème de Weierstrass, f admet un minimum et un maximum sur K.

2. Le carré $\partial K = K \backslash]0,1[^2$ peut être écrit $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ où les quatre côtés de ce carré sont donnés par

$$D_1 := \{(x,0) : x \in [0,1]\}, D_2 := \{(x,1) : x \in [0,1]\}, D_3 := \{(0,y) : y \in [0,1]\}, D_4 := \{(1,y) : y \in [0,1]\}.$$

   Ainsi, on a
   - Sur D_1 et D_3, $\forall x \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$, $f(x,0) = f(0,y) = 0$.
   - Sur D_2, $\forall x \in [0,1]$, $f(x,1) = -x^3$ admet son maximum 0 pour $x = 0$, c'est-à-dire au point $(0,1)$ et son minimum -1 pour $x = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$, par décroissance de $x \mapsto -x^3$.
   - Sur D_4, $\forall y \in [0,1]$, $f(1,y) = -y^3$ admet son maximum 0 pour $y = 0$, c'est-à-dire au point $(1,0)$ et son minimum -1 pour $y = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$, par décroissance de $x \mapsto -y^3$.

   Ainsi, sur ∂K,
   - f admet pour maximum 0 atteint en tout point de D_1 et D_3 ;
   - f admet pour minimum -1 atteint au point $(1,1)$.

3. Sur l'ouvert $\mathring{K} =]0,1[^2$, calculons les dérivées partielles de f, car f est différentiable sur $\mathring{K}$:

$$\forall (x,y) \in \mathring{K}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-x^2-y^2) + xy(-2x) = y(1-3x^2-y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-3y^2-x^2),$$

   et le système donnant les points critiques est

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} y(1-3x^2-y^2) = 0 \\ x(1-3y^2-x^2) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ ou } 1-3x^2-y^2 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } 1-3y^2-x^2 = 0 \end{array} \right.$$

   Si $y = 0$, alors $1 - 3y^2 - x^2 = 1 - x^2 = 0$ et donc $x \in \{-1,1\}$.
   Si $x = 0$, alors $1 - 3x^2 - y^2 = 1 - y^2 = 0$ et donc $y \in \{-1,1\}$.
   Si $y^2 = 1 - 3x^2$, alors $1 - 3y^2 - x^2 = 1 - 3(1-3x^2) - x^2 = 8x^2 - 2 = 0$, et donc $x \in \{-1/2, 1/2\}$, ce qui donne $1 - 3x^2 = 1 - 3/4 = 1/4$ et ainsi $y \in \{-1/2, 1/2\}$. Ainsi, l'unique point critique appartenant à $\mathring{K}$ est $(1/2, 1/2)$.
   Comme f est deux fois différentiable sur $\mathring{K}$, les dérivées partielles secondes de f sur $\mathring{K}$ sont données par

$$\forall (x,y) \in \mathring{K}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 3y^2 - 3x^2,$$

   et la hessienne de f au point $(1/2, 1/2)$ est donc

$$H_f(1/2,1/2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

   de déterminant $\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0$ et de trace -3, ce qui veut dire que $H_f(1/2,1/2)$ est définie négative et donc f admet un maximum au point $(1/2,1/2)$ qui vaut $f(1/2,1/2) = 1/8$.

4. On en déduit que f atteint son maximum $1/8$ sur K au point $(1/2,1/2)$ et son minimum -1 au point $(1,1)$.

Exercice 3 **Différentiabilité (1 + 0.75 + 1 + 1 + 0.25 + 1 + 1 + 1 = 7 points)**

Dans tout l'exercice, on considère, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f_m admet une dérivée directionnelle en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v = (a,b) \neq (0,0)$ si et seulement si $m \geq 2$, et préciser l'expression de cette dérivée.
2. Montrer que f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Montrer que si $m \geq 3$, alors f_m est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère maintenant seulement le cas $m = 3$.
   a) Montrer que $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   b) On admet que, de même, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire pour f_3 ?
   c) Calculer $\dfrac{\partial f_3}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f_3}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire quant à la différentiabilité seconde de f_3 ?
   d) Quand $(h,k) \to (0,0)$, on a
   $$f_3(1+h, 1+k) = \frac{1}{2} + \frac{hk}{2} + h - k^2 - 3h^2 + o(h^2+k^2).$$
   Montrer que les hypothèses permettent d'identifier exactement le gradient et la hessienne de f_3, dont on donnera les expressions, en un point (x_0, y_0) que l'on explicitera.
   e) Déduire de la question précédente la différentielle $D_{(0,0)}g$ au point $(0,0)$ de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f_3(2y+1, e^x)$.

Correction.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, alors on a
$$\frac{f_m(t(a,b)+(0,0)) - f_m(0,0)}{t} = \frac{f_m(ta,tb)}{t} = \frac{t^{m+1}a^m b}{t^3(a^2+b^2)} = t^{m-2}\frac{a^m b}{a^2+b^2}.$$
Ce quotient admet une limite finie quand $t \to 0$ si et seulement si $m \geq 2$ car :
   - si $m = 2$, cette limite vaut $\frac{a^2 b}{a^2+b^2} = \frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0)$,
   - si $m \geq 3$, cette limite vaut $0 = \frac{\partial f_m}{\partial v}(0,0)$ car $t^{m-2} \to 0$,
   - si $m < 2$, alors t^{m-2} n'a pas de limite finie en général (quand ni a ni b n'est nul par exemple) quand $t \to 0$, et donc le quotient non plus.
2. D'après la question précédente, on trouve, en prenant $v = (1,0)$ puis $v = (0,1)$, $\nabla_{(0,0)} f_2 = (0,0)$. Pour $(h,k) \neq (0,0)$, en notant
$$g(h,k) = \frac{|f_2(h,k) - f_2(0,0) - 0|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2|k|}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$
on a, pour tout $h > 0$, $g(h,h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $h \to 0^+$, et donc f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Soit $m \geq 3$, alors d'après la question 1., $\nabla_{(0,0)} f_m = (0,0)$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{|f_m(h,k) - f_m(0,0) - 0|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h|^m |k|}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{\sqrt{h^2+k^2}^m \sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{h^2+k^2}^{m-2} \to 0$$

quand $(h,k) \to (0,0)$ car $m-2>0$. Ainsi f_m est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle. Comme f_m est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas, car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2=0 \iff x=y=0$, f_m est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $m=3$.

a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

et, d'après la question 1., $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)=0$. La fonction $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$. Montrons que $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\left| \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leqslant \frac{x^4|y|+3x^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{4\sqrt{x^2+y^2}^5}{(x^2+y^2)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$ et donc $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, et on conclut que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Alternativement (sans rédaction ici) : en passant en coordonnées polaires, on trouve $4r$ comme majorant indépendant de θ, qui tend vers 0 quand $r \to 0$.

b) On en déduit que f_3 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses dérivées partielles premières sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

c) On calcule facilement, pour tout $x \neq 0$ et tout $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_3(x,h)-f_3(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3h}{h(x^2+h^2)} = x, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,y) = 0,$$

où la deuxième valeur est directement calculée grâce à la formule du a), et ainsi,

$$\frac{\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)}{x} = \frac{x}{x} = 1 \to 1 = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(0,0)$$

et de même

$$\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{0}{y} = 0 \to 0 = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Comme $\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(0,0)$, la fonction f_3 n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$ d'après le théorème de Schwarz.

d) Comme f_3 est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions deux fois différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas, il est clair que f_3 est deux fois différentiable au point $(1,1)$. Ainsi, d'après l'unicité des différentielles premières et secondes en ce point et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on trouve directement

$$\nabla_{(1,1)} f_3 = (1,0), \quad \text{et} \quad H_{f_3}(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

e) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a, par composition,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^x \partial_2 f_3(2y+1, e^x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\partial_1 f_3(2y+1,e^x),$$

et ainsi $\nabla_{(0,0)} g = (\partial_2 f_3(1,1), 2\partial_1 f_3(1,1)) = (0,2)$, ce qui permet de dire que, comme g est différentiable comme composée de fonctions différentiables, on obtient

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad D_{(0,0)} g(h,k) = 2k.$$

Exercice 4 **Minima globaux de fonctions à 3 variables (1.5 + 2 + 1.5 = 5 points)**

On considère la fonction $F :]0, +\infty[^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in]0, +\infty[^3, \quad F(x, y, z) = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$, $F(x, y, z) \geq 9$.
2. Montrer que $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$ est un point critique de F si et seulement si $x = y = z$.
3. Montrer que F atteint son minimum global, que l'on déterminera, en chacun de ses points critiques.

Correction.

1. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, alors en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$, on obtient

$$|\langle u, v\rangle|^2 = \left(\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \times \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \times \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 3^2 = 9 \leqslant (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = F(x, y, z).$$

2. Pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on calcule (par symétrie des variables)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}(x + y + z)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y^2}(x + y + z)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}(x + y + z).$$

Ainsi, on a

$$\nabla_{(x,y,z)}F = (0, 0, 0) \Rightarrow x = y = z = \sqrt{\frac{x + y + z}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}}.$$

Réciproquement, si $x = y = z > 0$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, x, x) = \frac{3}{x} - \frac{3x}{x^2} = 0,$$

et on trouve la même chose pour les deux autres dérivées partielles, et donc $\nabla_{(x,x,x)}F = (0, 0, 0)$.

3. D'après le cas d'égalité de la formule de Cauchy-Schwarz, on a égalité dans l'inégalité de la première question si et seulement s'il existe λ tel que $u = \lambda v$, c'est-à-dire

$$\sqrt{x} = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{y} = \frac{\lambda}{\sqrt{y}} \quad \sqrt{z} = \frac{\lambda}{\sqrt{z}},$$

c'est-à-dire si $x = y = z = \lambda$, donc d'après la question 2., si et seulement si (x, y, z) est un point critique de F. Dans ce cas, on trouve, pour tout $x > 0$,

$$F(x, x, x) = 3x \times \frac{3}{x} = 9,$$

et donc le minimum de F est bien 9, atteint pour tous les points critiques de F qui sont de la forme (x, x, x) avec $x > 0$.