Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 UE : Analyse 4

Contrôle Partiel n°2 du 31/03/2023

Durée : 1h30

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Question de cours (3 points)

Énoncer et démontrer la proposition sur la différentiabilité du produit de deux applications différentiables.

Exercice 2 Continuité et différentiabilité d'une fonction à paramètre (9 points)

Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Partie I - Continuité

I.1 Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on a

$$|f_\alpha(x,y)| \leqslant 2\|(x,y)\|_2^{\alpha-2}.$$

I.2 Montrer que si $\alpha > 2$, alors f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.

I.3 Montrer que si $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, alors f_α n'est pas continue au point $(0,0)$.

Partie II - Différentiabilité

II.1 Justifier que f_α n'est pas différentiable en $(0,0)$ lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

II.2 Montrer que si $\alpha > 3$, alors f_α admet des dérivées partielles en $(0,0)$ dont on donnera les valeurs.

II.3 Montrer que f_α est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice 3 Fonction höldérienne (4 points)

Soit $\alpha > 0$. On dit que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est β-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|F(x) - F(y)\|_2 \leqslant C\|x-y\|_2^\beta$.

1. Montrer que, pour tout $\beta > 0$, toute fonction β-höldérienne est continue.
2. Soit $\beta > 1$, montrer que la différentielle d'une fonction β-höldérienne est nulle en tout point.

Exercice 4 Dérivées partielles d'une composée (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que l'on admet être différentiable, définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x,y) = g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right)$$

1. Déterminer les dérivées partielles de ϕ au point $(0,1)$ en fonction des dérivées partielles de g en un point que l'on explicitera.
2. Donner l'expression de la différentielle de ϕ au point $(0,1)$.