Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2023–2024**

L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Partiel du Vendredi 15/03/2024

Durée : 2h

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Question de cours (4 points)

Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes de Weierstrass.

Exercice 2 Continuité (4 points)

Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, xy\ln(x^2+y^2) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 3 Topologie (0.5 + 1 + 1.5 + 1 = 4 points)

1. Montrer que $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max(|x-1|, |y+2|, |z-3|) < 4\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1, x < 1\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $C = \mathbb{Z}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^4 \leqslant 16\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide et $d_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto d_E(x) = \inf\limits_{a \in E} \|x - a\|_2$ désignant la distance entre le point x et l'ensemble E. Montrer que $x \in \overline{E} \iff d_E(x) = 0$.

Exercice 4 Normes (1.5 + 1.5 = 3 points)

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |2x - y| + |x + y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $R > 0$, on a

   $$B_\infty(X,R) \subset B_1(X,2R) \subset B_N(X,6R),$$

   où $B_N(X,r)$, $B_1(X,r)$ $B_\infty(X,r)$ désignent respectivement les boules ouvertes de rayon $r > 0$ centrées en $X \in \mathbb{R}^2$ pour les normes N, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Module de continuité (2 + 1 + 2 = 5 points)

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admet un module de continuité $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si ω est continue en 0, $\omega(0) = 0$ et si on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\|_2 \leqslant \omega(\|x - y\|_2)$.

1. Montrer que si f admet un module de continuité, alors f est continue.
2. Montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ admet un module de continuité dont on précisera l'expression.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact non-vide, $f, g : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \sup_{x \in K} \{f(x) + tg(x)\}.$$

   Montrer que h admet un module de continuité dont on précisera l'expression.