Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de Printemps 2023–2024**

L2 | UE : Analyse 4

Contrôle Partiel du Vendredi 15/03/2024

Correction

Exercice 1 **Question de cours (4 points)**

Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes de Weierstrass.

Correction.

Enoncé : Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset E$ un compact (non-vide) de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, toute fonction continue $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur un ensemble compact K atteint ses bornes sur K.

Preuve : Soit $K \subset E$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et $(y_k)_k \subset f(K)$. Montrons que $(y_k)_k$ admet une sous-suite convergente dans $f(K)$. On sait qu'il existe une suite $(x_k)_k \subset K$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = f(x_k)$. Comme K est compact, $(x_k)_k$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ convergente vers $x \in K$. La suite $(f(x_{\varphi(k)}))_k$ est une sous-suite de $(y_k)_k$. Comme f est continue sur E, $(f(x_{\varphi(k)}))_k$ converge vers $y := f(x) \in f(K)$. On en déduit donc que $f(K)$ est compact.

Supposons maintenant $p = 1$. L'ensemble $f(K)$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}$. Comme il est non-vide car $K \neq \emptyset$ et borné, il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure

$$m = \inf_{x \in K} f(x), \quad M = \sup_{x \in K} f(x).$$

Comme m et M sont par définition des limites de suites de $f(K)$ et que $f(K)$ est fermé, $m = \min_{x \in K} f(x) \in f(K)$ et $M = \max_{x \in K} f(x) \in f(K)$, ce qui signifie que f atteint donc ses bornes sur K.

Exercice 2 **Continuité (4 points)**

Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, xy \ln(x^2+y^2) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Correction. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ car chacune de ses composantes l'est comme quotient ou composée de fonctions continues car

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x^2 = y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

Etudions la continuité en $(0,0)$ en notant $f = (f_1, f_2, f_3)$.

• Pour étudier la continuité en $(0,0)$ de f_1, passons en coordonnées polaires. Pour tout $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$$|f_1(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{|3r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta|}{r} = r|3\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta| \leqslant r\left(3|\cos^2\theta| + |\cos\theta\sin\theta|\right) \leqslant 4r$$

et $\lim_{r \to 0} 4r = 0$. On a donc, par comparaison, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0 = f_1(0,0)$ et f_1 est donc continue en $(0,0)$.

• Pour étudier la continuité en $(0,0)$ de f_2 (ceci est probablement une variante de ce que vous avez vu en TD), on peut utiliser le fait que pour tout α, β réels, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et on obtient, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f_2(x,y)| = \frac{2\left|\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\left|\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\right| \times \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\frac{\left|\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\right|}{\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\right| \times \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2\frac{\left|\sin\left(\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}\right)\right|}{\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\sin\left(\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}\right)\right|}{\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}} = 1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 = 0$, et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2\left|\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\right| = 2|\cos(0)| = 2$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$ et f_2 est donc continue en $(0,0)$.

Alternativement, on peut utiliser les équivalents : pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, quand $(x,y) \to (0,0)$,

$$f_2(x,y) = \frac{x^2 + o(x^2) + y^2 + o(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{o(x^2)+o(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2\varepsilon_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

où $\varepsilon_1(x,y)$ et $\varepsilon_2(x,y)$ tendent vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$. Comme, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \leqslant x^2+y^2$ et $y^2 \leqslant x^2+y^2$, on obtient

$$\left|\frac{x^2\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}|\varepsilon_1(x,y)| \quad \text{et} \quad \left|\frac{y^2\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}|\varepsilon_2(x,y)|,$$

donc, par comparaison pour les deux derniers termes, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2\varepsilon_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ *et donc* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$ *ce qui prouve que f_2 est continue en $(0,0)$.*

• Pour étudier la continuité en $(0,0)$ de f_3, on note que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f_3(x,y)| = |x||y||\ln(x^2+y^2)| \leqslant \|(x,y)\|_2^2|\ln(\|(x,y)\|_2^2)| \to 0$$

quand $\|(x,y)\|_2^2 \to 0$, par croissances comparées, donc quand $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 0 = f_3(0,0)$ et f_3 est donc continue en $(0,0)$.
Ainsi, f est continue en $(0,0)$, donc finalement sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 3</u> Topologie (0.5 + 1 + 1.5 + 1 = 4 points)

1. Montrer que $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max(|x-1|, |y+2|, |z-3|) < 4\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leqslant 1, x < 1\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $C = \mathbb{Z}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^4 \leqslant 16\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide et $d_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto d_E(x) = \inf\limits_{a\in E}\|x-a\|_2$ désignant la distance entre le point x et l'ensemble E. Montrer que $x \in \overline{E} \iff d_E(x) = 0$.

Correction.

1. On remarque que $A = B_{\|\cdot\|_\infty}((1,-2,3),4)$, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ en tant que boule ouverte de $\mathbb{R}^3$.
2. B est la boule fermée pour la norme $\|\cdot\|_1$ privée du point $(1,0)$.
   Ce n'est pas un fermé car si on considère la suite $\left\{\left(1-\frac{1}{k+1}, 0\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, il s'agit d'une suite de points de B car :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|1 - \frac{1}{k+1}\right| + |0| = 1 - \frac{1}{k+1} \leqslant 1$,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{1}{k+1} < 1$,

et cette suite tend vers $(1,0) \notin B$, donc B n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Ce n'est pas non plus un ouvert car, pour tout $r > 0$, $B((0,1),r)$ centrée en $(0,1) \in B$ est telle que $\left(0, 1 + \frac{r}{2}\right) \in B((0,1),r)$ mais $\left(0, 1 + \frac{r}{2}\right) \notin B$ car $|0| + \left|1 + \frac{r}{2}\right| = 1 + \frac{r}{2} > 1$. On ne peut donc pas construire de boule ouverte centrée en $(0,1)$ et incluse dans B.

3. On commence par montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet, on a $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$ qui est une réunion d'ouverts, donc un ouvert, ce qui prouve que $\mathbb{Z}$ est fermé. Ainsi, $\mathbb{Z}^2$ est le produit cartésien de deux fermés, c'est donc un fermé.

   Montrons maintenant que $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^4 \leqslant 16\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

   L'ensemble C' est un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C'$ une suite qui converge vers (x,y), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $4x_k^2 + y_k^4 \leqslant 16$. Comme $(x,y) \mapsto 4x^2 + y^4$ est continue, par passage à la limite on obtient que $4x^2 + y^4 \leqslant 16$ ce qui prouve que $(x,y) \in C'$ et donc que C' est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   L'ensemble C' est aussi borné car, pour tout $(x,y) \in C'$, on a

$$4x^2 \leqslant 4x^2 + y^4 \leqslant 16 \quad \text{et} \quad y^4 \leqslant 4x^2 + y^4 \leqslant 16,$$

   ce qui implique que $x^2 \leqslant 4$ et $y^4 \leqslant 16$ et donc $|x| \leqslant 2$ et $|y| \leqslant 2$, ce qui implique que C' est bien un borné de $\mathbb{R}^2$.

   Ansi, C' est un compact de $\mathbb{R}^2$ comme fermé-borné, par le théorème de Heine-Borel.

   L'ensemble C est donc fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$. C'est aussi un borné car C' est borné. On en déduit donc que C est un compact de $\mathbb{R}^2$.

4. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \overline{E} &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E, \lim_{k\to+\infty} x_k = x \\ &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E, \lim_{k\to+\infty} \|x - x_k\|_2 = 0 \\ &\iff \inf_{a\in E} \|x - a\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 4 Normes (1.5 + 1.5 = 3 points)

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |2x - y| + |x + y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $R > 0$, on a

$$B_\infty(X,R) \subset B_1(X,2R) \subset B_N(X,6R),$$

   où $B_N(X,r)$, $B_1(X,r)$ $B_\infty(X,r)$ désignent respectivement les boules ouvertes de rayon $r > 0$ centrées en $X \in \mathbb{R}^2$ pour les normes N, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. On vérifie les 4 axiomes d'une norme :
   - Positivité. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|2x - y| \geq 0$ et $|x + y| \geq 0$, et donc $N(x,y) \geq 0$.
   - Séparation. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} N(x,y) = 0 \iff |2x - y| = |x + y| = 0 &\iff 2x - y = 0 \text{ et } x + y = 0 \\ &\iff 3x = 0 \text{ et } x + y = 0 \\ &\iff (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

- Homogénéité. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |2\lambda x - \lambda y| + |\lambda x + \lambda y| = |\lambda||2x - y| + |\lambda||x + y| = |\lambda| N(x,y).$$

- Inégalité triangulaire. Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} N((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= |2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2| + |x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \\ &\leqslant |2x_1 - y_1| + |2x_2 - y_2| + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &= N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Donc N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} N(x,y) = |2x - y| + |x + y| \leqslant 2|x| + |y| + |x| + |y| = 3|x| + 2|y| &\leqslant 3(|x| + |y|) = 3\|(x,y)\|_1 \\ &\leqslant 3(\max(|x|,|y|) + \max(|x|,|y|)) \\ &= 6\|(x,y)\|_\infty. \end{aligned}$$

On a donc montré que $N(x,y) \leqslant 3\|(x,y)\|_1 \leqslant 6\|(x,y)\|_\infty$.
Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. Si $Y \in B_\infty(X, R)$, alors $\|Y - X\|_\infty < R$ et donc, par l'inégalité précédente, on obtient

$$3\|Y - X\|_1 < 6\|Y - X\|_\infty < 6R$$

et donc $\|Y - X\|_1 < 2R$ ce qui veut dire que $Y \in B_1(X, 2R)$ et on a montré que $B_\infty(X,R) \subset B_1(X, 2R)$.
Si $Y \in B_1(X, 2R)$, cela implique donc, encore par l'inégalité démontrée précédemment, que

$$N(Y - X) < 3\|Y - X\|_1 < 6R$$

et donc que $Y \in B_N(X, 6R)$, et on a montré que $B_1(X, 2R) \subset B_N(X, 6R)$.
On en déduit finalement que $B_\infty(X,R) \subset B_1(X, 2R) \subset B_N(X, 6R)$.

Exercice 5 Module de continuité (2 + 1 + 2 = 5 points)

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admet un module de continuité $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si ω est continue en 0, $\omega(0) = 0$ et si on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\|_2 \leqslant \omega(\|x - y\|_2)$.

1. Montrer que si f admet un module de continuité, alors f est continue.
2. Montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ admet un module de continuité dont on précisera l'expression.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact non-vide, $f, g : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \sup_{x \in K} \{f(x) + tg(x)\}.$$

Montrer que h admet un module de continuité dont on précisera l'expression.

Correction.

1. Supposons que f admet un module de continuité ω. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $(x_k)_k \to x_0$, alors on a $\lim_{k \to +\infty} \omega(\|x_k - x_0\|_2) = \omega(0)$ car ω est continue en 0 et $\|x_k - x_0\|_2 \to 0$. Comme $\omega(0) = 0$, on a donc, par comparaison, que $\lim_{k \to +\infty} \|f(x_k) - f(x_0)\|_2 = 0$, donc $(f(x_k))_k \to f(x_0)$ pour n'importe quelle suite tendant vers x_0, donc f est continue en x_0, et donc sur $\mathbb{R}^n$.

2. Toute norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifie la deuxième inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|.$$

De plus, par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe $M > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x - y\| \leqslant M\|x - y\|_2$, et donc

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant M\|x - y\|_2.$$

Ainsi, $\|\cdot\|$ admet $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto Mt$ comme module de continuité qui est bien continue en 0 et tel que $\omega(0) = 0$.

3. Comme f et g sont continue sur le compact K, il en va de même pour $x \mapsto f(x) + tg(x)$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$, qui atteint donc son supremum qui est un maximum (et qui dépend de t) d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass. Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe $x_1 \in K$ (qui dépend de t) et $x_2 \in K$ (qui dépend de s) tels que

$$h(t) = f(x_1) + tg(x_1) = \max_{x \in K}\{f(x) + tg(x)\}, \quad \text{et} \quad h(s) = f(x_2) + sg(x_2) = \max_{x \in K}\{f(x) + sg(x)\}.$$

De plus, on sait que $h(s) \geq f(x_1) + sg(x_1)$ et $h(t) \geq f(x_2) + tg(x_2)$. On a donc

$$\begin{aligned} h(t) - h(s) = f(x_1) + tg(x_1) - h(s) \leqslant f(x_1) + tg(x_1) - (f(x_1) + sg(x_1)) &= (t - s)g(x_1) \\ &\leqslant |t - s| \max_{x \in K} |g(x)| \end{aligned}$$

et, de même

$$\begin{aligned} h(s) - h(t) = f(x_2) + sg(x_2) - h(t) \leqslant f(x_2) + sg(x_2) - (f(x_2) + tg(x_2)) &= (s - t)g(x_2) \\ &\leqslant |t - s| \max_{x \in K} |g(x)| \end{aligned}$$

ce qui prouve, en notant $k = \max\limits_{x \in K} |g(x)|$, que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(t) - h(s)| \leqslant k|t - s|,$$

et donc que h admet $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto kt$ comme module de continuité, qui vérifie bien $\omega(0) = 0$ et est continue en 0 (h est k-lipschitzienne).