6.4 Quelques remarques finales

On considère ici un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω et $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dans ce cas, le graphe de f

$$\mathscr{G}_f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

est une nappe/surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$. Elle peut être aussi écrite, en posant

$$F : \Omega \times f(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

$$\mathscr{G}_f := \{(x, y, z) \in \Omega \times f(\Omega) : F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

On sait que f est différentiable en (x_0, y_0), car de classe C^2 au voisinage de ce point. On a donc, au premier ordre, quand $(h, k) \to (0, 0)$ et $(x_0 + h, y_0 + k) \in \Omega$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|_2).$$

Cela peut s'écrire aussi de la manière suivante, en posant $x = x_0 + h$ (c'est-à-dire $h = x - x_0$) et $y = y_0 + k$ (c'est-à-dire $k = y - y_0$) : pour tout $(x, y) \in \Omega$ au voisinage de (x_0, y_0), quand $(x, y) \to (x_0, y_0)$,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|_2).$$

Ainsi, f est localement approximée au voisinage de (x_0, y_0), au premier ordre, par la fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ appelée approximation linéaire de f au point (x_0, y_0), définie par

$$P : (x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Le graphe de P est appelé **plan tangent à $\mathscr{G}_f$ au point $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, où $z_0 = f(x_0, y_0)$**. Ce plan a pour équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Cette équation de plan s'écrit aussi à l'aide de la fonction F (à vérifier)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(X_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(X_0)(z - z_0) = 0.$$

Il passe en effet par le point X_0 car $P(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ et joue le même rôle que la tangente au graphe d'une fonction g d'une variable réelle en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, connue pour être d'équation $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$.

Ainsi, pour tout vecteur $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a, puisque $f(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = D_{(x_0,y_0)}f(v) = D_{(x_0,y_0)}f(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\beta = P(x_0+\alpha, y_0+\beta) - P(x_0, y_0),$$

qui donne la différence de cote/hauteur entre les images des points (x_0, y_0) et $(x_0, y_0) + v$ sur le plan tangent.

De plus, comme ce plan tangent a pour équation

$$ax+by+cz+d=0, \quad a=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), b=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), c=-1,$$

le vecteur $n=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)=\nabla_{X_0}F$ est normal/orthogonal à ce plan.

A l'ordre 2, comme f est deux fois différentiable en (x_0,y_0) car de classe C^2, on obtient, quand $(x,y)\in\Omega$, $(x,y)\longmapsto(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\ &+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2), \end{aligned}$$

car $\|(x-x_0,y-y_0)\|_2^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

Ainsi, on a les résultats suivants (qui découle de ce que l'on a déjà démontré) :

- Si (x_0,y_0) est un point critique de f, alors P est la fonction constante égale à $f(x_0,y_0)$ et le plan tangent en X_0 à $\mathscr{G}_f$ a pour équation $z=f(x_0,y_0)$, c'est un plan horizontal, c'est-à-dire parallèle au plan (xOy).
- Si (x_0,y_0) est un point critique de f et $H_f(x_0,y_0)$ est définie positive, alors $\mathscr{G}_f$ est localement, au voisinage de X_0, au-dessus de ce plan tangent;
- Si (x_0,y_0) est un point critique de f et $H_f(x_0,y_0)$ est définie négative, alors $\mathscr{G}_f$ est localement, au voisinage de X_0, en-dessous de ce plan tangent;
- Si (x_0,y_0) est un point selle de f, $\mathscr{G}_f$ traverse localement, au voisinage de X_0, ce plan tangent.

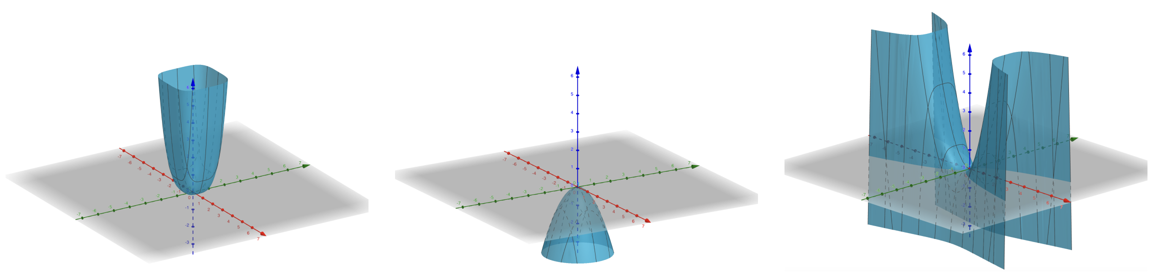

FIGURE 13 : Minimum local, maximum local, point selle et plan tangent en $(0,0)$, pour les fonctions $(x,y)\mapsto x^4+y^4$, $(x,y)\mapsto -x^2-y^2$ et $(x,y)\mapsto x^2-y^4$.