4.4 Arcs paramétrés (partie distribuée en CM)

Définition 4.38 (**Arc paramétré**). *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle éventuellement infini. On appelle arc (ou courbe) paramétré de $\mathbb{R}^n$ la donnée d'une application différentiable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, que l'on peut noter $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ où $x_k : I \to \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.*

- *L'image de φ, notée $\mathscr{C} = \varphi(I)$, s'appelle la courbe géométrique associée (appelé aussi le support de φ). On dit que φ définit une paramétrisation de $\mathscr{C}$.*
- *La courbe $\mathscr{C}$ est dite régulière si $\forall\, t \in I$, $\varphi'(t) = \left(x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\right) \neq (0, \ldots, 0)$. On dit aussi que φ est une paramétrisation régulière de $\mathscr{C}$ et que tout point $\varphi(t_0) \in \mathscr{C}$ tel que $t_0 \in I$ et $\varphi'(t_0) \neq (0, \ldots, 0)$ est régulier.*
- *Soit $t_0 \in I$ tel que $\varphi'(t_0) = (0, \ldots, 0)$. On dit que le point $\varphi(t_0)$ est un point singulier de la courbe $\mathscr{C}$.*

Exemple 4.39. Les exemples suivants sont les plus simples/importants :

- Graphe d'une fonction. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors sa courbe représentative est l'arc paramétré $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ où $\varphi : t \mapsto (t, f(t))$.
- Droite de $\mathbb{R}^n$: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ où, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) = a_i t + b_i$.
- Cercle de centre O et de rayon R : $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R\cos(t), R\sin(t))$.
- Ellipse de demi-axes $a > 0$ et $b > 0$: $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.
- Cycloïde : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto R(t - \sin t, 1 - \cos t)$.
- Hélice circulaire : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b > 0$.

Remarque 4.40. Une courbe $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ peut admettre une infinité de paramétrisations. Par exemple, le cercle $S((0,0), 1) \subset \mathbb{R}^2$ peut être paramétré par

- $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,
- $\varphi : [0, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$,
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \left(\dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}, \dfrac{2u}{1 + u^2}\right)$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Exemple 4.41 (**Courbe régulière et point singulier**). Voici deux exemples :

1. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique associée $\mathscr{C}$ la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière car $\varphi'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ a pour courbe géométrique associée la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y^2 = x^3$, appelée cubique. Comme $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$, le point $(0, 0)$ est l'unique point singulier de $\mathscr{C}$.

Proposition 4.42 (Dérivation de long d'un arc). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ un arc paramétré (donc dérivable en $t \in I$) tel que $\varphi(I) \subset V$ où $V \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\varphi(t)$. Alors $g \circ \varphi$ est différentiable en t et*

$$(g \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} g(\varphi'(t)).$$

L'application $(g \circ \varphi)'$ est appelée la dérivée de g le long de l'arc φ.

Démonstration. C'est une simple application de la formule de composition de fonctions différentiables. $\square$

Définition 4.43 (Vecteur normal unitaire et repère de Frenet). *Soit $\mathscr{C} = \varphi(I)$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ où $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, et $\varphi(t_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$. Alors le vecteur unitaire tangent à $\mathscr{C}$ en $\varphi(t_0)$ est donné par*

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|} = \frac{\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}.$$

On appelle vecteur normal unitaire à $\mathscr{C}$ en $\varphi(t_0)$ le vecteur $N(t_0)$ obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $T(t_0)$ dans le sens direct, c'est-à-dire

$$N(t_0) = \frac{\big(-y'(t_0), x'(t_0)\big)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}.$$

Le repère $(\varphi(t_0); T(t_0), N(t_0))$ est appelé repère de Frenet à $\mathscr{C}$ au point $\varphi(t_0)$.

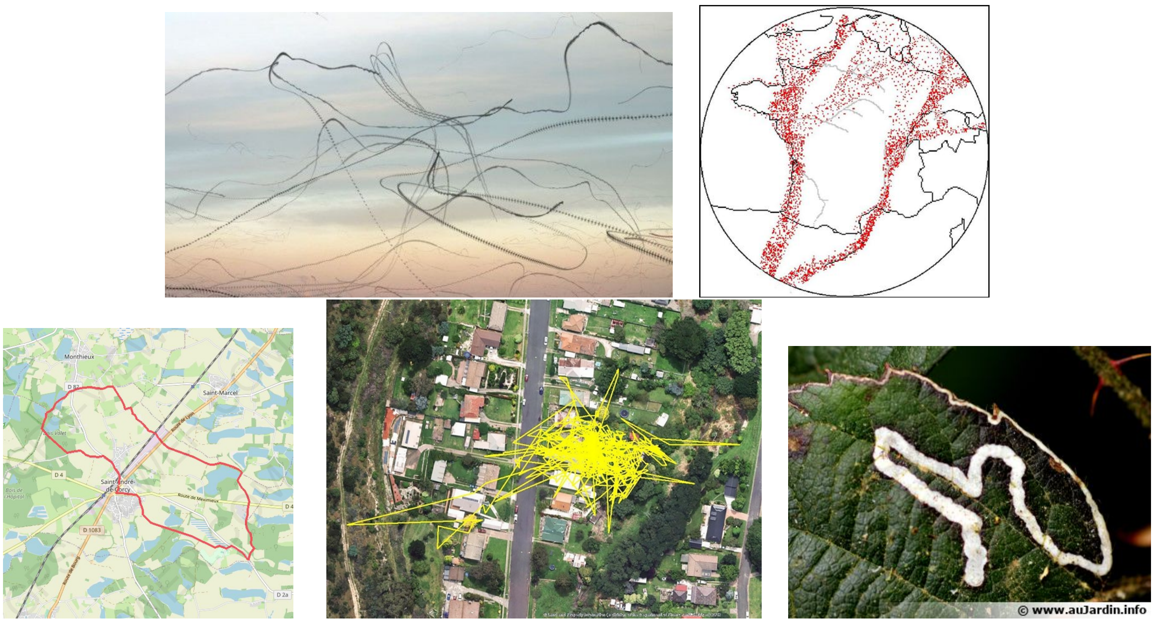

FIGURE 10 : Exemples de courbes : vols d'oiseaux dans le ciel (haut gauche), trajectoire des oiseaux migrateurs (haut droit), chemin de randonnée (bas gauche), suivi GPS d'un chat pendant une journée (bas milieu), chemin d'une chenille de nepticule dorée dans une feuille de ronce.