

Théorème 5.18 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. Si f est deux fois différentiable sur Ω , alors pour tout h tel que $x_0 + h \in \Omega$, on a (les trois formules sont identiques, simplement écrites de manières différentes) :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + D_{x_0}f(h) + \frac{1}{2}D_{x_0}^2f(h, h) + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j + o(\|h\|_2^2). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur Ω . Montrons que $f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle = o(\|h\|_2^2)$. Pour cela, on définit $g : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$g(t) = f(x_0 + th) - f(x_0) - t\langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - \frac{t^2}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle,$$

où $h \in \Omega$ est tel que $[x_0, x_0 + h] = \{x_0 + th : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$ de telle sorte que g soit continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On remarque que

$$g(1) - g(0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle.$$

Comme g est dérivable on a, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$g'(t) = D_{x_0+th}f(h) - \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - t\langle H_f(x_0)h, h \rangle.$$

Comme f est deux fois différentiable sur Ω , Df est différentiable en x_0 et on en déduit (cf. preuve de la proposition précédente) qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0, \delta)$ et tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0+h}f(k) = D_{x_0}f(k) + D_{x_0}^2f(h, k) + \|h\| \|k\| \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0. Pour $h \in B(0, \delta)$ et $t \in]0, 1[$, en appliquant la formule précédente à $(h, k) = (th, h) \in B(0, \delta) \times B(0, \delta)$ car $t \in]0, 1[$, on obtient, par bilinéarité de $D_{x_0}^2f$, $D_{x_0+th}f(k) = D_{x_0}f(h) + D_{x_0}^2f(th, h) + \|th\| \|h\| \varepsilon(th)$, et donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= D_{x_0}f(h) + D_{x_0}^2f(th, h) + \|th\| \|h\| \varepsilon(th) - \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - t\langle H_f(x_0)h, h \rangle \\ &= D_{x_0}f(h) + tD_{x_0}^2f(h, h) + \|th\| \|h\| \varepsilon(th) - D_{x_0}f(h) - tD_{x_0}^2f(h, h) = t\|h\|^2 \varepsilon(th), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue par bilinéarité de $D_{x_0}^2f$. On en déduit que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad |g'(t)| \leq |\varepsilon(th)| t \|h\|^2 \leq \tilde{\varepsilon}(h) \|h\|^2$$

en notant $\tilde{\varepsilon}(h) = \sup_{t \in]0, 1[} |\varepsilon(th)| \geq 0$ qui a une limite nulle quand $h \rightarrow 0$. On applique l'inégalité des accroissements finis à g qui est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, et on a donc :

$$\left| f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0}f, h \rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle \right| = |g(1) - g(0)| \leq \left(\sup_{t \in]0, 1[} |g'(t)| \right) (1 - 0) \leq \tilde{\varepsilon}(h) \|h\|^2,$$

et on obtient le résultat voulu. \square

Exemple 5.19. Si $n = 2$, et sous les hypothèses du théorème précédent, on a, quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + o(h^2 + k^2)$$

5.3 Généralisation... en bref et sans preuve!

On peut généraliser les sections précédentes pour $k \geq 3$:

- Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est k fois différentiable si les dérivées partielles d'ordre $k - 1$ sont différentiables.
- Dans ce cas, f admet des dérivées partielles d'ordre k en tout point x_0 de l'ouvert Ω et on note $D_{x_0}^k f$ la différentielle k -ième au point x .
- L'application $D_{x_0}^k f$ est k -linéaire et on a, pour tout $(h^1, \dots, h^k) \in (\mathbb{R}^n)^k$,

$$D_{x_0}^k f(h^1, \dots, h^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0) h_{i_1}^1 \dots h_{i_k}^k.$$

- Le fait que f soit k fois différentiable assure que la forme k -linéaire précédente est symétrique (théorème de Schwarz généralisé) : on peut dériver par rapport aux variables dans n'importe quel ordre, cela ne change pas le résultat. Autrement dit, si (j_1, \dots, j_k) est une permutation de (i_1, \dots, i_k) , alors

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0).$$

- Une application f est de classe C^k si elle est de classe C^{k-1} et de dérivées partielles k -ièmes continues. Une telle application est automatiquement k fois différentiable.
- La formule de Taylor-Young à l'ordre k pour f qui est k fois différentiable s'écrit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} D_{x_0}^j f(h, \dots, h) + o(\|h\|_2^k).$$

- De même, on peut définir la notion de fonction infiniment différentiable, c'est-à-dire que $D^k f$ est différentiable pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, on dit que $f \in C^\infty(\Omega)$ si f admet des dérivées partielles de tout ordre qui sont continues.

6 Col, collines et étangs : les points critiques et extrema locaux

6.1 Définitions

Définition 6.1 (Extremum local). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \Omega \cap E, \quad f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{resp. } f(x_0) \geq f(x)).$$

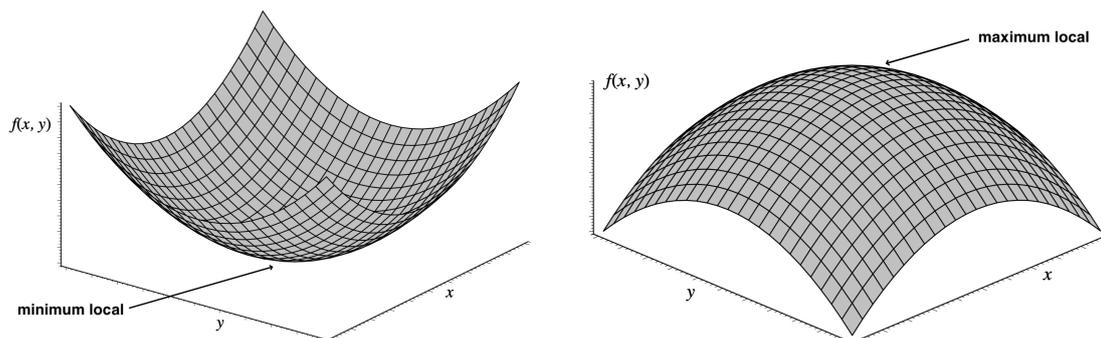


FIGURE 11 : Exemples de minimum et maximum locaux

Remarque 6.2. On a donc ici deux cas importants :

- si x_0 est un point intérieur à E , alors Ω peut être considéré comme inclus dans E (quitte à le modifier), et $D_{x_0}f$ a un sens.
- si x_0 n'est pas un point intérieur à E , c'est-à-dire que l'on ne peut pas y centrer une boule ouverte incluse dans E , alors on a nécessairement que, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_0 , $\Omega \cap E^c \neq \emptyset$ (x_0 est sur le "bord" de E), et $D_{x_0}f$ n'a pas de sens ici.

Définition 6.3 (Point critique). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à E . On suppose que f est différentiable en x_0 . Alors on dit que x_0 est un point critique de f si $\nabla_{x_0}f = 0$.

6.2 Conditions Nécessaires et Suffisantes d'ordre 1 et 2

Proposition 6.4 (Condition nécessaire d'ordre 1 pour un extremum). Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si x_0 est un point intérieur à E , f est différentiable en x_0 et admet en x_0 un extremum local, alors x_0 est un point critique de f .

Démonstration. Comme x_0 est un extremum local de f , les n fonctions $g_i : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ admettent un extremum local en $t = 0$, donc leurs dérivées en 0, qui sont les dérivées partielles de f en x_0 sont toutes nulles. On a donc bien $\nabla_{x_0}f = 0$ et x_0 est un point critique de f . \square