**Théorème 5.18** (**Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. Si $f$ est deux fois différentiable sur $\Omega$, alors pour tout $h$ tel que $x_0 + h \in \Omega$, on a (les trois formules sont identiques, simplement écrites de manières différentes) :*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + D_{x_0}f(h) + \frac{1}{2}D^2_{x_0}f(h,h) + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j + o(\|h\|_2^2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit $x_0 \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur $\Omega$. Montrons que $f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle = o(\|h\|_2^2)$. Pour cela, on définit $g : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$ par

$$g(t) = f(x_0+th) - f(x_0) - t\langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{t^2}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle,$$

où $h \in \Omega$ est tel que $[x_0, h] = \{tx_0 + (1-t)h : t \in [0,1]\} \subset \Omega$ de telle sorte que $g$ soit continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On remarque que

$$g(1) - g(0) = f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle.$$

Comme $g$ est dérivable on a, pour tout $t \in ]0,1[$,

$$g'(t) = D_{x_0+th}f(h) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - t\langle H_f(x_0)h, h\rangle.$$

Comme $f$ est deux fois différentiable sur $\Omega$, $Df$ est différentiable en $x_0$ et on en déduit (cf. preuve de la proposition précédente) qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0,\delta)$ et tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0+h}f(k) = D_{x_0}f(k) + D^2_{x_0}f(h,k) + \|h\|\|k\|\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon$ est une fonction de limite nulle en 0. Pour $h \in B(0,\delta)$ et $t \in ]0,1[$, en appliquant la formule précédente à $(h,k) = (th,h) \in B(0,\delta) \times B(0,\delta)$ car $t \in ]0,1[$, on obtient, bar bilinéarité de $D^2_{x_0}f$, $D_{x_0+th}f(k) = D_{x_0}f(h) + D^2_{x_0}f(th,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th)$, et donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= D_{x_0}f(h) + D^2_{x_0}f(th,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - t\langle H_f(x_0)h, h\rangle \\ &= D_{x_0}f(h) + tD^2_{x_0}f(h,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th) - D_{x_0}f(h) - tD^2_{x_0}f(h,h) = t\|h\|^2\varepsilon(th), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue par bilinéarité de $D^2_{x_0}f$. On en déduit que

$$\forall t \in ]0,1[, \quad |g'(t)| \leq |\varepsilon(th)|t\|h\|^2 \leq \tilde{\varepsilon}(h)\|h\|^2$$

en notant $\tilde{\varepsilon}(h) = \sup_{t\in]0,1[} |\varepsilon(th)| \geq 0$ qui a une limite nulle quand $h \to 0$. On applique l'inégalité des accroissements finis à $g$ qui est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et on a donc :

$$\left| f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle \right| = |g(1) - g(0)| \leq \left( \sup_{t\in]0,1[} |g'(t)| \right)(1-0) \leq \tilde{\varepsilon}(h)\|h\|^2,$$

et on obtient le résultat voulu. □

**Exemple 5.19.** Si $n = 2$, et sous les hypothèses du théorème précédent, on a, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + o(h^2+k^2)$$

## 5.3 Généralisation... en bref et sans preuve !

On peut généraliser les sections précédentes pour $k \geq 3$ :

- Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $k$ fois différentiable si les dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont différentiables.
- Dans ce cas, $f$ admet des dérivées partielles d'ordre $k$ en tout point $x_0$ de l'ouvert $\Omega$ et on note $D^k_{x_0} f$ la différentielle $k$-ième au point $x$.
- L'application $D^k_{x_0} f$ est $k$-linéaire et on a, pour tout $(h^1, ..., h^k) \in (\mathbb{R}^n)^k$,

$$D^k_{x_0} f(h^1, ..., h^k) = \sum_{i_1, ..., i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_0) h^1_{i_1} ... h^k_{i_k}.$$

- Le fait que $f$ soit $k$ fois différentiable assure que la forme $k$-linéaire précédente est symétrique (théorème de Schwarz généralisé) : on peut dériver par rapport aux variables dans n'importe quel ordre, cela ne change pas le résultat. Autrement dit, si $(j_1, ..., j_k)$ est une permutation de $(i_1, ..., i_k)$, alors

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_0).$$

- Une application $f$ est de classe $C^k$ si elle est de classe $C^{k-1}$ et de dérivées partielles $k$-ièmes continues. Une telle application est automatiquement $k$ fois différentiable.
- La formule de Taylor-Young à l'ordre $k$ pour $f$ qui est $k$ fois différentiable s'écrit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j_{x_0} f(h, .., h) + o(\|h\|_2^k).$$

- De même, on peut définir la notion de fonction infiniment différentiable, c'est-à-dire que $D^k f$ est différentiable pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, on dit que $f \in C^\infty(\Omega)$ si $f$ admet des dérivées partielles de tout ordre qui sont continues.

# 6 Cols, collines et étangs : les points critiques et extrema locaux

## 6.1 Définitions

**Définition 6.1 (Extremum local).** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. On dit que $f$ admet un minimum (resp. maximum) local en $x_0$ s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\forall x \in \Omega \cap E, \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \text{(resp. } f(x_0) \geq f(x)\text{)}.$$

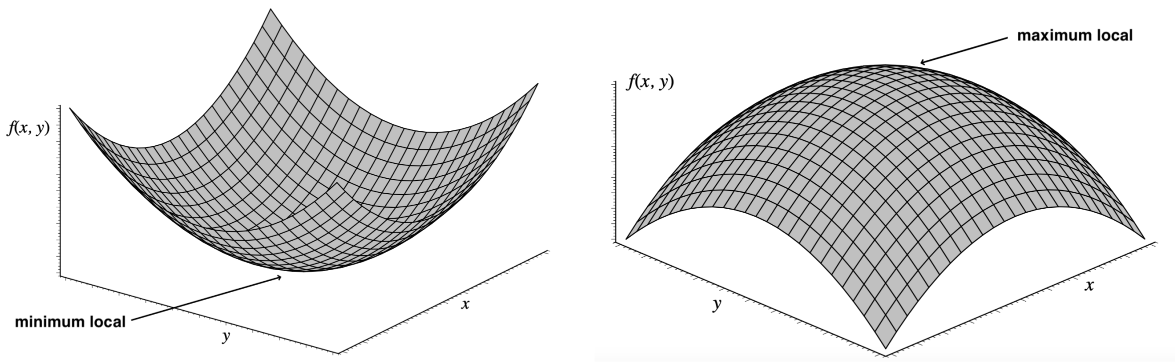


FIGURE 11 : Exemples de minimum et maximum locaux

**Remarque 6.2.** On a donc ici deux cas importants :

- si $x_0$ est un point intérieur à $E$, alors $\Omega$ peut être considéré comme inclus dans $E$ (quitte à le modifier), et $D_{x_0} f$ a un sens.
- si $x_0$ n'est pas un point intérieur à $E$, c'est-à-dire que l'on ne peut pas y centrer une boule ouverte incluse dans $E$, alors on a nécessairement que, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant $x_0$, $\Omega \cap E^c \neq \emptyset$ ($x_0$ est sur le "bord" de $E$), et $D_{x_0} f$ n'a pas de sens ici.

**Définition 6.3 (Point critique).** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x_0$ un point intérieur à $E$. On suppose que $f$ est différentiable en $x_0$. Alors on dit que $x_0$ est un point critique de $f$ si $\nabla_{x_0} f = 0$.*

## 6.2 Conditions Nécessaires et Suffisantes d'ordre 1 et 2

**Proposition 6.4 (Condition nécessaire d'ordre 1 pour un extremum).** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $x_0$ est un point intérieur à $E$, $f$ est différentiable en $x_0$ et admet en $x_0$ un extremum local, alors $x_0$ est un point critique de $f$.*

*Démonstration.* Comme $x_0$ est un extremum local de $f$, les $n$ fonctions $g_i : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ admettent un extremum local en $t = 0$, donc leurs dérivées en 0, qui sont les dérivées partielles de $f$ en $x_0$ sont toutes nulles. On a donc bien $\nabla_{x_0} f = 0$ et $x_0$ est un point critique de $f$. □