Remarque 1.24. Quelques remarques sur cette notion de convergence :
• Attention : une suite pourrait converger pour une certaine norme et pas pour une autre ! Sur $\mathbb{R}^n$, ce ne sera pas le cas, et cela grâce à l'équivalence des normes.

✎ ***Exercice :*** *Vérifier que la notion de suite convergente ne dépend pas de la norme choisie.*

• On peut réécrire cette définition en utilisant la notion de boule ouverte associée à la norme $\|\cdot\|$ de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_k \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon).$$

On peut aussi dire : *"quelque soit le voisinage (cf. chapitre suivant, mais une boule ouverte suffit) de x – aussi petit que l'on veut au sens de l'inclusion –, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage."*

Proposition 1.25 (Convergence des coordonnées d'une suite). *La suite $(x_k)_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, \ldots, x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour $|\cdot|$.*

Remarque 1.26. On peut choisir n'importe quelle autre norme que $\|\cdot\|_2$ dans la proposition précédente, car toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. On suppose que $(x_k)_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, \ldots, x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors, en appliquant l'assertion précédente à ε, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |x_k^i - x^i| = \sqrt{(x_k^i - x^i)^2} \leq \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Cela prouve que $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Réciproquement, supposons que $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors, pour chacun de ces i, on a

$$\forall \varepsilon_i > 0, \quad \exists N_i \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N_i, \quad |x_k^i - x^i| < \varepsilon_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors en appliquant les n assertions précédentes à $\varepsilon_i = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, on trouve qu'il existe $N = \max_i N_i$ tel que pour tout $k \geq N$, on a

$$\|x_k - x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = n\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2,$$

et donc $\|x_k - x\|_2 < \varepsilon$, ce qui prouve que $(x_k)_k$ converge vers x. □

Remarque 1.27. Plusieurs remarques concernant cette partie du cours :

- Tout $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension fini est normable (on peut y définir une norme). En effet, un tel espace admet toujours une base $\{e_i\}_i$. Ainsi, on peut donc définir

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, x_i \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

  qui est une norme sur cet espace (même preuve que pour la norme 1 classique).

- Exemple de norme sur un espace de dimension infini : soient $a < b$ et $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application $\|\cdot\|_1$ définie par

  $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

  est une norme sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

2 Arpenter les lieux : éléments de topologie dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

Dans ce chapitre, on se restreint à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1 Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

Définition 2.1 (Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$). *On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$, alors :*

- *on dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si*

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \Omega.$$

- *on dit que $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.2 (Ensemble non-ouvert). On remarque que $A \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas un ouvert si et seulement si

$$\exists x \in A, \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \not\subset A.$$

Cela ne veut PAS dire que A est fermé ! Il existe des ensembles ni ouverts, ni fermés.

Remarque 2.3 (Indépendance par rapport à la norme). Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme choisie (norme équivalentes implique inclusion de boules ouvertes). Ainsi, la notion de fermé ne dépend pas non plus de la norme.

Proposition 2.4 (Ouverts comme réunions de boules ouvertes). *Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des réunions de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit

$$\mathscr{R}_\Omega := \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ r : B(x,r) \subset \Omega}} B(x, r).$$

Remarquons qu'à chaque $x \in \Omega$, l'existence d'un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ est assurée par le fait que Ω est un ouvert.
Montrons que $\mathscr{R}_\Omega = \Omega$. Soit $y \in \mathscr{R}_\Omega$, alors il est clair que $y \in \Omega$. Réciproquement, soit $y \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \Omega$, et donc $B(y, r) \subset \mathscr{R}_\Omega$, ce qui prouve que $y \in \mathscr{R}_\Omega$ et donc que l'on a égalité entre ces deux ensembles. □

Proposition 2.5 (Caractérisation séquentielle d'un fermé). *Une partie F est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.*

Démonstration. Raisonnons par contraposée et montrons ainsi que

$$F \text{ n'est pas fermé} \iff \exists (x_k)_k \subset F \text{ telle que } \lim_{k \to +\infty} x_k = x \notin F.$$

Supposons que F n'est pas fermé, alors F^c n'est pas ouvert et donc il existe $x \in F^c$ telle que pour toute suite $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+$ tendant vers 0, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B(x, \varepsilon_k) \not\subset F^c$. Ainsi, on fixe une suite $(\varepsilon_k)_k$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap F$. La suite $(x_k)_k$ ainsi construite est une suite d'éléments de F qui vérifie, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_k - x\| < \varepsilon_k \to 0$ quand $k \to +\infty$, et donc converge vers $x \notin F$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $(x_k)_k \subset F$ qui converge vers $x \notin F$. Ainsi $x \in F^c$ et, comme $(x_k)_k$ tend vers x,

$$\forall r > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \|x_k - x\|_2 < r.$$

On a ainsi, $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset F^c$, puisque cette boule contient $x_k \in F$. Ainsi, F^c n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et donc F n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$. □

Proposition 2.6 (Réunions et intersections d'ouverts et de fermés). *On a :*

1. *Les ensembles $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est un fermé.*
3. *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*
4. *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.*
5. *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*
6. *La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.*