Proposition 4.14 (Différentielle et applications définies sur un espace produit). *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^{p_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{p_k}$ *un ouvert et* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ *définie pour tout* $x \in \Omega$ *par*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Alors, si f *est différentiable sur* Ω *on a*

$$\forall (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{p_k}, \quad D_x f(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i=1}^{k} D_{x_i} f(h_i),$$

où, pour tout $1 \leq i \leq k$*,* $D_{x_i} f(h_i) = D_x f(0, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0)$ *définit la différentielle partielle de* f *suivant la* i*-ème coordonnée.*

Remarque 4.15. Attention : la différentiabilité des applications partielles $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ n'implique pas la différentiabilité de f !
De plus, la notation $D_{x_i} f$ doit être vue comme abusive. Il s'agit de la différentielle de l'application f suivant la variable x_i, donc une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. Soit $1 \leq i \leq k$, $h_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ et $(x_1, \ldots x_k) \in \Omega$ tel que $(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_k) \in \Omega$, alors la différentiabilité de f implique

$$\frac{\| f(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k) - D_x f(0, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0) \|_2}{\| h_i \|_2} \to 0$$

quand $h_i \to 0$. On obtient ainsi l'expression de la différentielle partielle $D_{x_i} f$:

$$D_{x_i} f(h_i) = D_x f(0, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0)$$

et le résultat se déduit par linéarité de la différentielle $D_x f$:

$$D_x f(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i=1}^{k} D_x f(0, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{k} D_{x_i} f(h_i).$$

$\square$

4.2 Opérations algébriques sur les différentielles

Proposition 4.16 (Opérations). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$, $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$. Si f et g sont différentiables sur Ω, et φ différentiable sur V, alors :*

1. ***(Linéarité)*** *$\alpha f + g$ est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$, on a*
$$D_x(\alpha f + g) = \alpha D_x f + D_x g.$$

2. ***(Produit)*** *si $p = 1$, fg est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$, on a*
$$D_x(fg) = g(x) D_x f + f(x) D_x g.$$

3. ***(Quotient)*** *si $p = 1$ et $g \neq 0$ sur Ω, alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable sur Ω et pour tout $x \in \Omega$, on a*
$$D_x\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x) D_x f - f(x) D_x g}{(g(x))^2}.$$

4. ***(Composée)*** *si de plus $f(\Omega) \subset V$, alors $\varphi \circ f$ est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$,*
$$D_x(\varphi \circ f) = D_{f(x)}\varphi \circ D_x f.$$

Démonstration. (Non-donnée en CM, mais similaire à celle donnée en L1 pour $n = p = m = 1$)
1. Linéarité. Par différentiabilité de f et g, on obtient, pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \Omega$,
$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2) \\ g(x+h) &= g(x) + D_x g(h) + o(\|h\|_2). \end{aligned}$$

On en déduit donc que
$$(\alpha f + g)(x+h) = (\alpha f + g)(x) + (\alpha D_x f + D_x g)(h) + o(\|h\|_2),$$
où $h \mapsto (\alpha D_x f + D_x g)(h)$ est linéaire, ce qui permet de conclure que $\alpha f + g$ est différentiable, de différentielle $\alpha D_x f + D_x g$.

4. Composée. Soit $x \in \Omega$. Par hypothèse, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \Omega$ et tout $k \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(x) + k \in V$,
$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2) \\ \varphi(f(x)+k) &= \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi(k) + o(\|k\|_2). \end{aligned}$$

La première égalité nous donne
$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x+h)) = \varphi\left(f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2)\right).$$

Ainsi, on obtient à partir de la deuxième égalité, pour $k = D_x f(h) + o(\|h\|_2)$,
$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi\left(D_x f(h) + o(\|h\|_2)\right) + o\left(\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2\right),$$

et ainsi, par linéarité de $D_{f(x)}g$, on obtient

$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi \circ D_x f(h) + r(h),$$

où $\mapsto D_{f(x)}\varphi \circ D_x f(h)$ est linéaire et le reste $r(h)$ est donné par

$$r(h) := D_{f(x)}\varphi\,(o(\|h\|_2)) + o\big(\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2\big).$$

Il reste à montrer que $r(h) = o(\|h\|_2)$. Par continuité des applications $D_{f(x)}\varphi$ et $D_x f$, il existe deux réels positifs L et M tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{R}^p$,

$$\|D_x f(h)\|_2 \leq L\|h\|_2, \quad \text{et} \quad \|D_{f(x)}\varphi(k)\|_2 \leq M\|k\|.$$

On en déduit que

$$\|D_{f(x)}\varphi\,(o(\|h\|_2))\,\|_2 \leq M|o(\|h\|_2)|$$

et

$$\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2 \leq \|D_x f(h)\|_2 + |o(\|h\|_2)| \leq L\|h\|_2 + |o(\|h\|_2)|.$$

Ainsi, $r(h) = o(\|h\|_2)$ et l'application $\varphi \circ f$ est donc différentiable en $x \in \Omega$ et $D_x(\varphi \circ f) = D_{f(x)}\varphi \circ D_x f$.

2. Produit. On considère l'application bilinéaire $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = xy.$$

L'application φ est bilinéaire et différentiable, donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D_{(x,y)}\varphi(h, k) = hy + xk.$$

Considérons maintenant l'application $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x \in \Omega$ par

$$u(x) = (f(x), g(x)).$$

Alors u est différentiable et on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x u(h) = \big(D_x f(h), D_x g(h)\big).$$

On remarque maintenant que l'application $p : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = f(x)g(x)$$

vérifie $p = \varphi \circ u$ et sa différentielle en $x \in \Omega$ est donc (d'après 4.)

$$D_x p = D_{(f(x),g(x))}\varphi \circ D_x u,$$

et on obtient ainsi $D_x(fg) = g(x)D_x f + f(x)D_x g$.

3. Quotient. On remarque que $q = \varphi \circ \Psi$ où $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(u, v) = \frac{u}{v}$ et $\Psi = (f, g)$. L'application φ est différentiable et on a $\varphi(u, v) = u \times i(v)$ où $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $i(z) = \frac{1}{z}$. On a donc, par composition, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$D_{(u,v)}\varphi(h, k) = h \times i(v) + u \times D_v i(k) = \frac{h}{v} - \frac{ku}{v^2} = \frac{hv - ku}{v^2}.$$

On en déduit donc que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D_{x_0} q(h) = D_{x_0}(\varphi \circ \Psi)(h) = (D_{\Psi(x_0)}\varphi \circ D_{x_0}\Psi)(h) &= D_{\Psi(x_0)}\varphi(D_{x_0} f(h), D_{x_0} g(h)) \\ &= \frac{f(x_0)D_{x_0} g(h) - g(x_0)D_{x_0} f(h)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

□

4.3 Dérivées directionnelles/partielles, gradient et matrice Jacobienne

Définition 4.17 (**Dérivées directionnelles**). *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $x_0 \in \Omega$*,* $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *et* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$*. On dit que* f *admet une dérivée en* x_0 *suivant le vecteur* v *si l'application*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, \quad t \mapsto f(x_0 + tv)$$

est différentiable en 0, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \text{existe.}$$

La dérivée de f *en* x_0 *selon* v *se note alors* $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$*.*
De plus, si f *admet une dérivée selon le vecteur* v *en tout point* x *de* Ω*, on appelle dérivée de* f *suivant* v *l'application*

$$\frac{\partial f}{\partial v} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

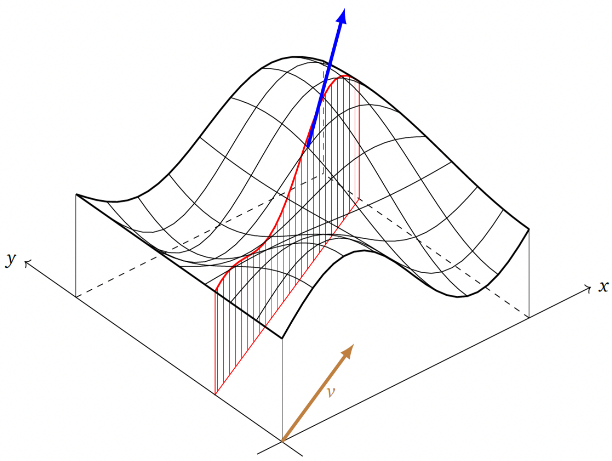

FIGURE 8 : Cas de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La dérivée suivant le vecteur v au point (x_0, y_0) donne la pente (par rapport au plan (xOy)) du vecteur dessiné en bleu partant de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Exemple 4.18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 - y^3,$$

et considérons le vecteur $v = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$ et le point $x_0 = (1, 0)$. Montrons que $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2$.
(Exercice donné en CM)

Proposition 4.19 (**Différentiabilité implique dérivées directionnelles**). *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $x_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$*. Si* f *est différentiable en* x_0 *alors pour tout vecteur* $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*,* f *admet une dérivée en* x_0 *suivant* v *et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = D_{x_0} f(v).$$

Démonstration. Soient $t \neq 0$ et $v \neq 0$, alors, comme f est différentiable en x_0, on a, quand $t \to 0$,

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \frac{D_{x_0}f(tv)+o(\|tv\|_2)}{t} = D_{x_0}f(v)+o(1) \to D_{x_0}f(v),$$

par linéarité de $D_{x_0}f$. Donc f admet une dérivée en x_0 suivant v qui est bien $D_{x_0}f(v)$. □

Remarque 4.20. (Fonction non-différentiable mais avec des dérivées directionnelles) La réciproque de cette proposition est fausse!! Une application peut admettre en x_0 une dérivée directionnelle suivant n'importe quel vecteur v non-nul sans qu'elle soit continue en x_0 (et donc non-différentiable en ce point).
Par exemple, on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $x_0 = (0,0)$, alors

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \frac{f(ta,tv)}{t} = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que f admet une dérivée directionnelle en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v \neq 0$. Cependant, on a, quand $x \to 0$,

$$f\left(x,\sqrt{x}\right) = 1 \to 1 \neq f(0,0),$$

et donc f n'est pas continue en x_0, et donc non-différentiable en ce point.

Définition 4.21 (Dérivées partielles). *Soit $\mathscr{B} := \{e_1,...,e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$. On dit que f admet une i-ème dérivée partielle (première) en x_0 si f admet une dérivée en x_0 suivant le vecteur e_i. On la notera généralement $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ ou $\partial_i f(x_0)$ (plus rarement $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)$).*
De plus, si f admet une i-ème dérivée partielle en tout point $x \in \Omega$, on appelle i-ème dérivée partielle de f l'application

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Enfin, si f admet une telle dérivée partielle pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\{\partial_1 f,...,\partial_n f\}$ sont appelées les dérivées partielles de f.

Remarque 4.22 (Dérivées partielles par rapport à la base canonique). En pratique, on choisira le plus souvent la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$. L'application f admet donc une i-ème dérivée partielle au point $x_0 = (x_1,...,x_n)$

$$\iff u \mapsto f(x_1,...,x_{i-1},u,x_{i+1},...x_n) \text{ est dérivable en } x_i,$$

$$\iff t \mapsto f(x_0+te_i) = f(x_1,...,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},...x_n) \text{ est dérivable en } 0,$$

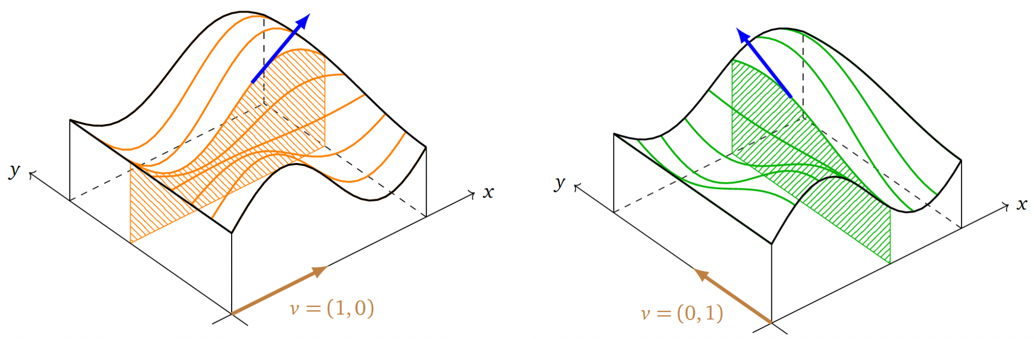

FIGURE 9 : Cas de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La dérivée suivant le vecteur $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) au point (x_0, y_0) donne la pente (par rapport au plan (xOy)) du vecteur dessiné en bleu partant de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_0)}{t}.$$

On calcule donc la dérivée par rapport à la variable x_i en considérant les autres variables constantes.

Exemple 4.23. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 y - 2\sin(xy).$$

Comme, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto f(x, y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0, y)$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 2y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2x\cos(xy).$$

Proposition 4.24 (Différentielle et dérivées partielles). *Soit $\mathscr{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^p$. Alors :*

1. *si f est différentiable en x_0, alors les n dérivées partielles de f en x_0 existent;*
2. *pour tout $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$D_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Démonstration. Si f est différentiable en x_0, alors f admet des dérivées directionnelles en x_0 dans toutes les directions, en particuliers dans celles données par la base $\mathscr{B}$. Les n dérivées partielles existent donc bien. De plus, on a

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{x_0} f(e_i).$$

Pour $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on obtient donc, par linéarité de la différentelle,

$$D_{x_0} f(h) = D_{x_0} f\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_{x_0} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

$\square$

Exemple 4.25. On considère $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (xe^{xy}, x^2+y^2)$$

et $x_0 = (2,1)$. Montrons que $D_{x_0}f$ est définie par

$$\forall (h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2, \quad D_{x_0}f(h_1,h_2) = (3e^2h_1+4e^2h_2, 4h_1+5h_2).$$

✎ (Exercice donné en CM)

Remarque 4.26. La réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet, f peut admettre des dérivées partielles en x_0 sans être différentiable, ni même continue en x_0. (cf. plus haut)

Remarque 4.27. En pratique, pour étudier la différentiabilité de f en x_0 :

1. On étudie l'existence des dérivées partielles de f en x_0 en cherchant à calculer, pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$,
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t},$$
ce qui donnera $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ si la limite existe. Si une de ces limites n'existe pas, alors f n'est pas différentiable en x_0.

2. Si toutes les dérivées partielles existent, on considère l'application linéaire $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ définie par
$$\forall h = (h_1,\dots,h_n), \quad L(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$
et on vérifie que
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0.$$
Si c'est le cas, alors f est différentiable en x_0 et $D_{x_0} = L$, sinon elle ne l'est pas.

Définition 4.28 (Gradient). *Soit $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ où $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert. Si f est différentiable, alors pour tout $x_0\in\Omega$, on appelle gradient de f en x_0 le vecteur des dérivées partielles de f en x_0, c'est-à-dire*

$$\nabla_{x_0} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Notons que l'on a, pour tout $h\in\mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0}f(h) = \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0). \tag{4.2}$$

Remarque 4.29. En fait, $\nabla_{x_0} f$ est l'unique vecteur vérifiant (4.2). En effet, comme $D_{x_0}f$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, il s'agit simplement d'une application du Théorème de représentation de Riesz.

Exemple 4.30. Le gradient de l'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, donnée par $f(x,y,z) = x^3-2xz-z^3$, en (x,y,z) est

$$\nabla_{(x,y,z)} f = \left(3x^2-2y, -2x, -3z^2\right)$$

Exemple 4.31. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, alors (par composition) on a, pour tout $x \neq 0$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|} = \langle \frac{x}{\|x\|}, h\rangle,$$

et on en déduit automatiquement que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \nabla_x f = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

Définition 4.32 (**Matrice Jacobienne et jacobien d'une application**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en x_0, on appelle matrice jacobienne de f au point x_0 la matrice de l'application linéaire $D_{x_0} f$. Elle est noté $J_f(x_0)$ et on a*

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

On a ainsi, pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$J_f(x_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix} = D_{x_0} f(h).$$

De plus, si $p = n$, on appelle jacobien de f au point x_0, noté $\mathrm{Jac} f(x_0)$ le déterminant de $J_f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Jac} f(x_0) = \det\big(J_f(x_0)\big)$$

Exemple 4.33. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 + 2z^2).$$

✎ Déterminons la jacobienne de f et la différentielle de f en tout point (Exercice donné en CM). On a

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$$

et, pour tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{(x,y,z)} f(h) = J_f(x, y, z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \big(yzh_1 + xzh_2 + xyh_3, 2xh_1 + 2yh_2 + 4zh_3\big)$$

Le résultat suivant se déduit automatiquement des propriétés sur les différentielles.

Proposition 4.34 (Matrice jacobienne et opérations). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^p$ deux applications différentiables en x_0, alors on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$J_{\alpha f+g}(x_0) = \alpha J_f(x_0) + J_g(x_0).$$

Soit $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert tel que $f(\Omega) \subset V$. On suppose que f est différentiable en $x_0 \in \Omega$ et h est différentiable en $f(x_0)$, alors

$$J_{h\circ f}(x_0) = J_h(f(x_0)) \times J_f(x_0)$$

De plus, dans ce cas, on a

$$\mathrm{Jac}(h \circ f)(x_0) = \mathrm{Jac}\, h(f(x_0)) \times \mathrm{Jac}\, f(x_0)$$

Exemple 4.35. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (xy^2, e^{xy}) \quad \text{et} \quad g(u, v) = u^3 - v^3.$$

Déterminons $J_{g\circ f}(1,1)$. On calcule facilement

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix},$$

et ainsi, au point $x_0 = (1,1)$, on a

$$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(f(1,1)) = J_g(1,e) = \begin{pmatrix} 3 & -3e^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$J_{g\circ f}(1,1) = J_g(f(1,1)) \times J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -3e^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3e^2 & 6-3e^3 \end{pmatrix}.$$

✎ *Exercice : retrouver ce résultat en calculant directement $g \circ f$ puis en déterminant sa matrice jacobienne.*

La formule donnant la matrice jacobienne d'une fonction composée permet de montrer le résultat suivant (c'est une simple multiplication de matrices) :

Proposition 4.36 (Dérivées partielles d'une fonction composée à valeurs réelles). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. On considère l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ définie par*

$$f(x_1, ..., x_n) = \big(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n)\big) \in \mathbb{R}^p$$

telle que $f(\Omega) \subset V$, différentiable en $x_0 \in \Omega$ et $g : V \to \mathbb{R}$,

$$(y_1, \cdots, y_p) \mapsto g(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}.$$

différentiable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et pour tout $1 \le i \le n$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)$$

Exemple 4.37. (Coordonnées polaires).
On considère l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(r,\theta) \in \Omega$ par

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

De plus, soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $g : V \to \mathbb{R}$ $((x,y) \mapsto g(x,y))$ différentiable et $f(\Omega) \subset V$. On considère $h : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $h = g \circ f$, de telle sorte que $h(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}(r,\theta) \\
= \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}(r,\theta),
\end{aligned}$$

et on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Notons aussi que la matrice jacobienne de f en (r,θ) est

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc son jacobien vaut

$$\mathrm{Jac} f(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$