Proposition 5.14 (**Différentielle seconde bilinéaire symétrique**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable, alors pour tout $x \in \Omega$, $D_x^2 f$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. On sait déjà que $D_x^2 f$ est une forme bilinéaire. Montrons qu'elle est symétrique, c'est-à-dire que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D_x^2 f(h,k) = D_x^2 f(k,h)$.
Comme f est deux fois différentiable, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x f(h)$ est différentiable sur Ω. On a donc, quand $h \to 0$, dans l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$\varphi_{x,h} := D_{x+h} f - D_x f - D_x[Df(h)] = o(\|h\|_2),$$

ce qui veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \|h\|_2 < \delta \Rightarrow |\varphi_{x,h}(k)| \leq \varepsilon \|h\|_2.$$

En particulier, en utilisant le fait que $\varphi_{x,h}$ est une application linéaire, et en appliquant cette inégalité à $\frac{k}{\|k\|}$ quand $k \neq 0$, comme $\varphi_{x,h}\left(\frac{k}{\|k\|_2}\right) = \frac{\varphi_{x,h}(k)}{\|k\|_2}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k \neq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_2 < \delta \Rightarrow |\varphi_{x,h}(k)| \leq \varepsilon \|k\|_2 \|h\|_2.$$

Cette inégalité restant vrai pour $k = 0$, on a donc obtenu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0,\delta)$ et tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| D_{x+h} f(k) - D_x f(k) - D_x[Df(h)](k) \right| \leq \varepsilon \|h\|_2 \|k\|_2, \quad D_x[Df(h)](k) = D_x^2 f(h,k).$$

Fixons $h \in B(0,\delta)$ et $k \in \mathbb{R}^n$, et définissons $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$ par

$$\psi(t) = f(x+h+tk) - f(x+tk) - t D_x^2 f(h,k).$$

La fonction ψ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $t \in]0,1[$, en notant $u(t) = x+h+tk$, on a

$$D_t(f \circ u) = D_{u(t)} f \circ D_t(u) = D_{x+h+tk} f(k),$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= D_{x+h+tk} f(k) - D_{x+tk} f(k) - D_x^2 f(h,k) \\
&= \left[D_{x+h+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(h+tk,k) \right] - \left[D_{x+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(tk,k) \right],
\end{aligned}$$

par bilinéarité de $D_x^2 f$. On obtient donc, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
|\psi'(t)| &\leq \left| D_{x+h+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(h+tk,k) \right| + \left| D_{x+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(tk,k) \right| \\
&\leq \varepsilon \|h+tk\|_2 \|k\|_2 + \varepsilon \|tk\|_2 \|k\|_2 \leq \varepsilon \|k\|_2 \left(\|h\|_2 + t\|k\|_2 + t\|k\|_2 \right) \\
&\leq \varepsilon (\|h\|_2 + 2\|k\|_2) \|k\|_2.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\psi(1) - \psi(0) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D_x^2 f(h,k)$$

et on applique le théorème des accroissements finis à ψ sur $[0,1]$, ce qui nous donne, pour un certain $t_0 \in]0,1[$,

$$\left| \psi(1) - \psi(0) \right| = |\psi'(t_0)(1-0)| = |\psi'(t_0)| \leq \varepsilon \left(\|h\|_2 \|k\|_2 + 2\|k\|_2^2 \right)$$

c'est-à-dire

$$\left|f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)-D_x^2 f(h,k)\right| \leq \varepsilon\left(\|h\|_2\|k\|_2+2\|k\|_2^2\right)$$

En échangeant les rôles de k et h, on obtient aussi que

$$\left|f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)-D_x^2 f(k,h)\right| \leq \varepsilon\left(\|h\|_2\|k\|_2+2\|h\|_2^2\right).$$

On obtient donc

$$\left|D_x^2 f(h,k)-D_x^2 f(k,h)\right| \leq 2\varepsilon\left(\|h\|_2\|k\|_2+\|h\|_2^2+\|k\|_2^2\right).$$

Cette inégalité est en faite valable pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ par bilinéarité de $D_x^2 f$. Ainsi, quand $\varepsilon\to 0$, on obtient que $D_x^2 f(h,k)=D_x^2 f(k,h)$ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et donc que $D_x^2 f$ est symétrique. □

Corollaire 5.15 (Théorème de Schwarz). *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert et $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable en $x_0\in\Omega$, alors pour tout $1\leq i,j\leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que $D_x^2 f$ soit une forme quadratique bilinéaire symétrique dès que f est deux fois différentiable. □

Remarque 5.16 (Réciproque fausse). Le réciproque du théorème est fausse. Ce n'est pas parce que le théorème de Schwarz est vérifié en x_0 que f est deux fois différentiable en x_0. Il suffit de considérer le contre-exemple suivant : soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dans le cas où $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et $f(0,y)=0$ pour tout $y\in\mathbb{R}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0),$$

mais f n'est pas deux fois différentiable au voisinage de $(0,0)$ (Exercice).

Exemple 5.17. Donnons ici deux exemples d'applications de ce théorème :

1. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est définie par $f(x,y)=x^4+2x^2-3y^3$, alors il est clair que

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=4x^3,$$

   car $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ et donc deux fois différentiable.

2. **Exemple de Peano.** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

   $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles de f en $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0}} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

De plus, on a, pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = -y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = x.$$

On obtient donc

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1.$$

On en déduit que f n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$.