6.3 Quelques exemples de calculs d'extrema

6.3.1 Extrema libres, sur l'espace tout entier

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Cherchons les points critiques de f :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x,$$

et donc, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,y)} f = 0 &\iff 3x^2 - 3y = 0 \text{ et } 3y^2 - 3x = 0 \\ &\iff x^2 = y \text{ et } y^2 = x. \end{aligned}$$

Ainsi, si (x, y) est un point critique, alors nécessairement $x^4 = x$ et donc $x(x^3 - 1) = 0$, c'est-à-dire que $x = 0$ ou $x = 1$. Ainsi,

- si $x = 0$, alors $0 = y$ et $y^2 = 0$, donc $y = 0$;
- si $x = 1$, alors $1 = y$ et $y^2 = 1$, donc $y = 1$.

Les points critiques sont donc $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
Cherchons maintenant la nature de ces points critiques en déterminant la hessienne de f. On a, comme $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3.$$

On a donc

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- On a donc, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $D^2_{(0,0)} f((h, k), (h, k)) = -6hk$ qui est strictement positif pour $(h, k) = (-1, 1)$ et strictement négatif pour $(h, k) = (1, 1)$. Ainsi $(0, 0)$ est un point selle.
  Alternativement, le polynôme caractéristique de $H_f(0, 0)$ est

  $$P(X) = X^2 - 9$$

  qui admet 3 et -3 comme racine. Ainsi, les deux valeurs propres de la matrice sont de signe opposé, donc $(0, 0)$ est un point selle de f.

- On a, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$,

  $$D_{(1,1)} f((h, k), (h, k)) = 6h^2 + 6k^2 - 6hk = 6(h^2 + k^2 - hk) = 6\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right) \geq 0$$

  et $D_{(1,1)} f((h, k), (h, k)) = 0 \iff k = 0$ et $h = \frac{k}{2} = 0$, donc cette forme quadratique est bien définie positive, ce qui veut dire que f admet au point $(1, 1)$ un minimum local.
  Alternativement, le polynôme caractéristique de $H_f(1, 1)$ est

  $$P(X) = (X - 6)^2 - 9 = (X - 9)(X - 3),$$

  donc les valeurs propres de la matrice sont $9 > 0$ et $3 > 0$, ce qui prouve qu'elle est définie positive et donc que f admet un minimum local en $(1, 1)$.
  Il ne s'agit pas d'un minimum global car, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x, y) = \lim_{x \to -\infty} x^3 + y^3 - 3xy = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x^2}\right) = -\infty.$$

6.3.2 Extrema sur un compact

On souhaite trouver les extrema de $f : K \to \mathbb{R}$ sur un compact K Comme on a $\overline{K} = K = \mathring{K} \sqcup \partial K$, il faut étudier ces extrema sur :

1. *$\mathring{K}$, l'intérieur de K, en utilisant les points critiques et la hessienne,*
2. *∂K, le bord de K, en écrivant explicitement ce que devient la fonction. Par exemple si $n = 2$ et $\partial K = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ est une courbe plane, alors on étudiera la fonction d'une variable réelle $t \mapsto f(x(t), y(t))$ sur I (variations si nécessaire, minima, maxima).*

Il suffira ensuite de conclure en fonction de ce que l'on aura trouvé sur ces deux ensembles (quel est le plus petit (resp. grand) des minima (resp. maxima) locaux trouvés et en quels points sont-ils atteints).

On considère la boule euclidienne unité fermée de $\mathbb{R}^2$ $K = \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ et $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. Cherchons les extrema de f sur K. Comme K est compact et f continue comme somme de fonctions continues, alors f atteint ses bornes sur K d'après le théorème des borners atteintes de Weierstrass.

- On cherche les extrema locaux parmi les points intérieurs à K, c'est-à-dire sur $B(0,1)$. Les points critiques (x, y) de f sur l'ouvert $B(0,1)$ vérifient

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff 2x = 0 \text{ et } -2y = 0$$

et on trouve donc que $(x, y) = (0,0) \in B(0,1)$ est en fait l'unique point critique de f. La hessienne de f est donnée par

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et donc les valeurs propres de f sont 2 et -2, de signes opposés, donc $(0,0)$ est un point selle de f. Comme f est continue sur le compact K (car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f y admet un minimum et un maximum. Ceux-ci sont donc sur le bord de K.

- On étudie f sur $\partial K = \partial\overline{B}(0,1) = S(0,1)$. Pour cela, on remarque que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0,2\pi]\}.$$

On a donc, pour tout $t \in [0,2\pi]$,

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t).$$

Il ne reste plus qu'à étudier la fonction $t \mapsto \cos(2t)$ sur $[0,2\pi]$ pour trouver les points pour lesquels le maximum et le minimum est atteint.
Le maximum vaut naturellement 1 quand $2t = 0[2\pi]$, c'est-à-dire quand $t = 0[\pi]$, ce qui correspond aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$.
Le minimum vaut -1 atteint quand $2t = \pi[2\pi]$, c'est-à-dire quand $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui correspond aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$.

6.3.3 Extremum global “à la main"

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4$, alors f est deux fois différentiable et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$$

et donc $\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff x^3 = y^3 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. De plus, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

On a donc $H_f(0,0)$ qui est la matrice nulle, et ainsi 0 est l'unique valeur propre de $H_f(0,0)$. On ne peut donc pas conclure en utilisant les résultats du cours. Par contre, il est clair que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0),$$

et on a égalité si et seulement si $(x,y) = (0,0)$ et donc f admet un minimum global unique au point $(0,0)$.

6.3.4 Point selle “à la main"

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 - y^4$, alors f est deux fois différentiable et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y^3$$

et donc $\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff x^3 = y^3 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. De plus, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

On a donc $H_f(0,0)$ qui est la matrice nulle, et ainsi 0 est l'unique valeur propre de $H_f(0,0)$. On ne peut donc pas conclure en utilisant les résultats du cours. Par contre, on remarque que :

- Pour $y = 0$, alors $x \mapsto f(x,0) = x^4$ admet son minimum global en $x = 0$,
- Pour $x = 0$, alors $y \mapsto f(0,y) = -y^4$ admet son maximum global en $y = 0$.

Ainsi, $(0,0)$ est un point selle de f.

6.3.5 Pavé de volume fixé et d'aire minimal

On souhaite construire une boîte de volume fixée avec le moins de matière possible (surface minimale).
On considère un pavé droit de côtés $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et de volume $xyz = V$. Déterminons les extrema de l'aire total de ce pavé, donnée par $2(xy + yz + xz)$.
On peut exprimer cette aire en fonction uniquement de x et y car $z = \dfrac{V}{xy}$. On obtient donc une aire $A : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, fonction de x et y, donnée par

$$A(x,y) = 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right).$$

A est différentiable comme somme de fonctions différentiables et on a donc, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right), \quad \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right).$$

Ainsi, (x, y) est un point critique si et seulement si

$$y - \frac{V}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad x - \frac{V}{y^2}.$$

On a donc $y = \frac{V}{x^2}$ et ainsi $x\left(\frac{V}{x^2}\right)^2 = V$ et on trouve $x = V^{\frac{1}{3}}$ et donc $y = V^{\frac{1}{3}}$. Le seul point critique de A est donc $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$. Etudions la nature de ce point critique. A est deux fois différentiable comme somme de fonctions deux fois différentiable et on a donc, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4V}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$$

et donc, au point $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$, on obtient

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = 4, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = 1,$$

et la hessienne de A au point critique est donc

$$H_A(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $P(X) = (2 - X)^2 - 1 = (2 - X - 1)(2 - X + 1) = (1 - X)(3 - X)$ et donc ses valeurs propres sont $\{1, 3\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et donc $H_A(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}$ est définie positive, ce qui veut dire que A admet un minimum local au point $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$. Comme, de plus, pour y_0 et x_0 fixés,

$$\lim_{x \to 0} A(x, y_0) = \lim_{y \to 0} A(x_0, y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} A(x, y) = +\infty$$

ainsi que

$$\lim_{x \to +\infty} A(x, y_0) = \lim_{y \to +\infty} A(x_0, y) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} A(x, y) = +\infty,$$

alors $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$ réalise le minimum global de A sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Le minimum global de l'aire est donc atteint quand

$$(x, y, z) = (V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}),$$

c'est-à-dire pour un cube.