3 D'un lieu à l'autre : la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

3.1 Fonctions de plusieurs variables (exemples pour $(n, p) = (2, 1)$)

A partir de maintenant, nous allons considérer des fonctions de plusieurs variables qui sont assez difficiles à représenter graphiquement. Il est important de garder en tête le cas des fonctions de deux variables réelles $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En effet, celles-ci peuvent être représentées graphiquement dans un espace de dimension 3 muni d'un repère $(O; i, j, k)$:

- l'ensemble de définition D_f de f est une partie de $\mathbb{R}^2$ et peut donc être représenté comme un ensemble de point du plan ;
- habituellement, on représente le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble

  $$\mathscr{G}_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\right\}$$

  sous la forme d'une nappe/surface de $\mathbb{R}^3$;

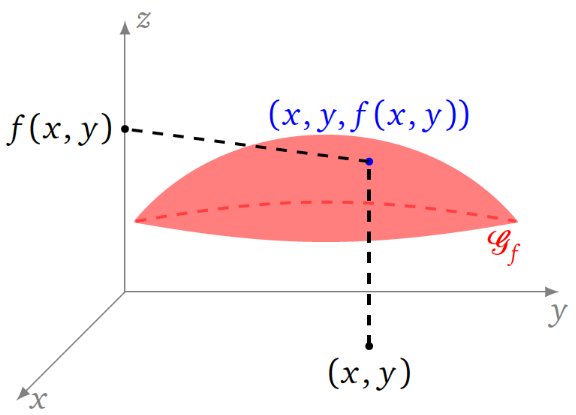

FIGURE 2 : Représentation d'un graphe $\mathscr{G}_f$

Par exemple, la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(1 + x + y)$ est définie sur l'ensemble

$$D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\},$$

et la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$ est définie sur l'ensemble

$$D_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \neq 0\}.$$

Ces ensembles de définitions sont représentés sur la figure 3.

La figure 4 présente trois exemples très simples de représentation graphiques de fonctions à deux variables.

Une fonction peut avoir un comportement assez compliqué, avec différents extrema locaux comme celle représentée sur la figure 5

On peut parfois revenir à l'étude d'une fonction à une seule variable réelle, en fixant par exemple $y = b$ (resp. $x = a$) et étudiant $x \mapsto f(x, b)$ (resp. $y \mapsto f(a, y)$) (cf. figure 6), ou en

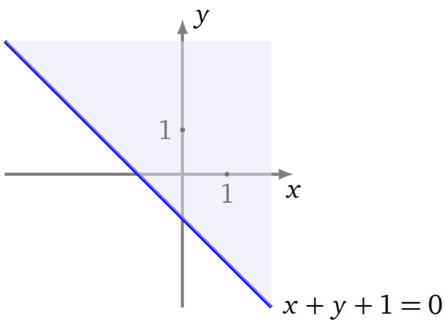

FIGURE 3 : Représentation graphique de D_f (demi-plan bleu clair) et D_g (en dehors de la parabole rouge)

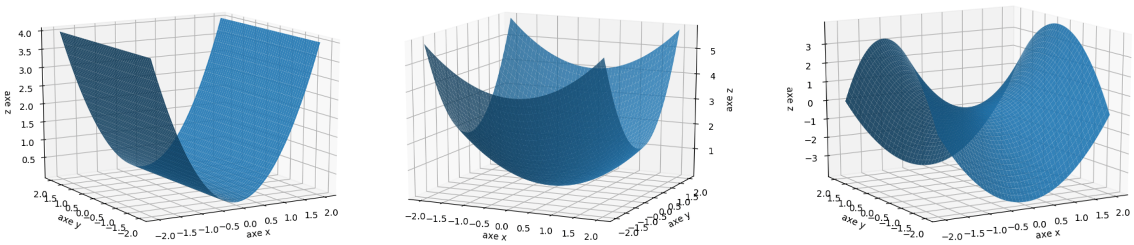

FIGURE 4 : Représentation graphique de $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

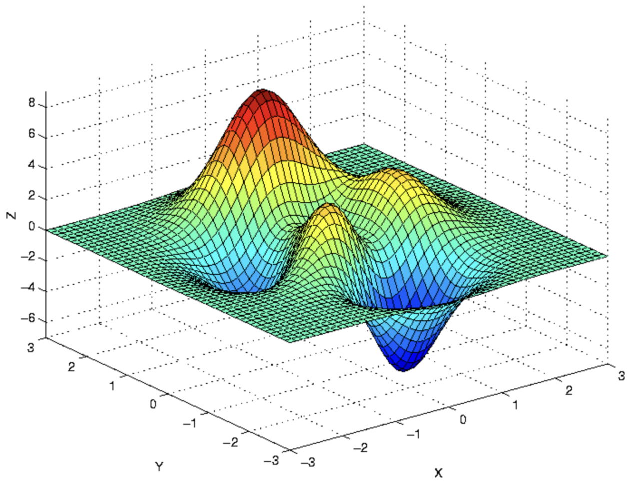

FIGURE 5 : Exemple de graphe avec des extrema locaux

suivant une autre courbe du plan $(x(t), y(t))$ (par exemple une autre droite) et en étudiant $t \mapsto f(x(t), y(t))$. Le nombre infini de ces courbes explique pourquoi il est si difficile d'étudier f contrairement au cas des fonctions à une variable réelle. Une illustration est donnée sur la figure 7

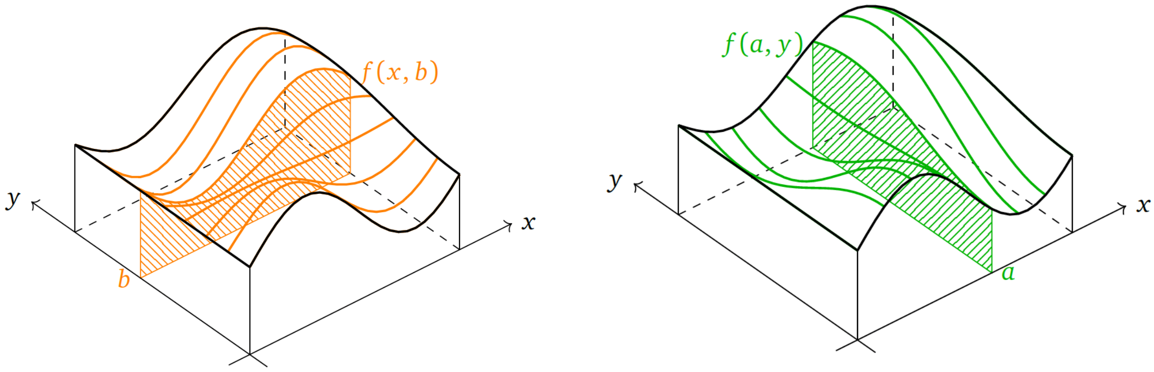

FIGURE 6 : Représentations en tranches du graphe d'une fonction de deux variables

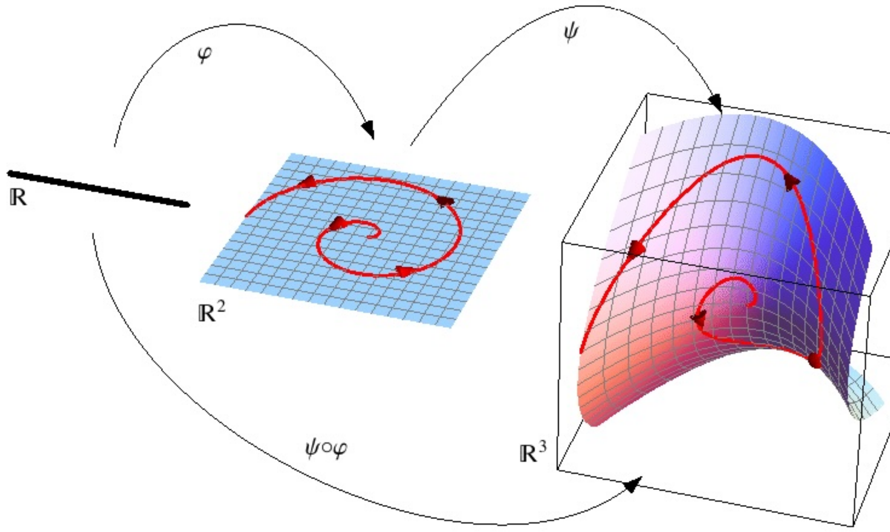

FIGURE 7 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (courbe, pas nécessairement une droite) et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(ou $\mathbb{R}$) (nappe/surface) alors $\psi \circ \varphi$ est une courbe sur la surface.

3.2 Limite d'une fonction

Les définitions suivantes généralisent celles vue sur $\mathbb{R}$ dans les cours précédents.

Définition 3.1 (Limite d'une fonction en un point). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E. On dit que f a pour limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ quand $x \to x_0$ dans E, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\|_2 < \varepsilon$$

✎ **Remarque 3.2.** Il est facile (et formateur) de montrer que la définition de limite ne dépend pas de la norme considérée, si celle-ci est équivalente à $\|\cdot\|_2$ (Exercice).

Remarque 3.3. Comme dans le cas des suites, la convergence de f vers y_0 quand $x \to x_0$ est équivalente avec la convergence de chacune de ses composantes vers celles de y_0, autrement dit, si $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ et $y_0 = (y_1, \dots, y_p)$, alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0 \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_i(x) = y_i.$$

✎ Il est facile de montrer (Exercice) le résultat suivant portant sur l'unicité et les opérations sur les limites. La preuve est la même que dans le cas $n = p = 1$.

Proposition 3.4 (Unicité et opérations sur les limites). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E.*

1. *(Unicité) Si la limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ de f en x_0 existe, alors cette limite est unique.*
2. *(Somme) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = y'_0$, alors $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = y_0 + y'_0$.*
3. *(Produit) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = y'_0$, alors $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = y_0 y'_0$.*
4. *(Quotient) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = y'_0 \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x)(x) = \frac{y_0}{y'_0}$.*
5. *(Composée) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ où y_0 est un point adhérent à $\mathrm{Im}(f)$, et $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}^p$ est telle que $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$, alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = z_0$.*

Exemple 3.5. Il est essentiel de comprendre que $x \to x_0$ signifie que x tend vers x_0 de toutes les façons possibles. Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

On souhaite étudier la limite de f au point $(0,0)$ adhérent à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, si $y = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si on se déplace sur une droite passant par l'originie, on a, pour tout $(x, y) \neq (0,0)$:

$$f(x, y) = f(x, ax) = \frac{a^2 x^3}{x^2 + a^4 x^4} = \frac{a^2 x}{1 + a^4 x^2},$$

et donc $\lim_{x \to 0} f(x, ax) = 0$. Cela ne veut pas dire que la limite de f en $(0,0)$ est 0. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors

$$f(x^2, x) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

et ainsi $\lim_{x \to 0} f(x^2, x) = \frac{1}{2}$, ce qui montre par unicité que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3.3 Fonctions continues

Définition 3.6 (Fonction continue). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in E$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$.

Remarque 3.7 (Fonction discontinue). On dit donc que f est discontinue en x_0 si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \text{ et } \|f(x) - f(x_0)\|_2 \geq \varepsilon.$$

Remarque 3.8 (Invariance par rapport à la norme). Par l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on pourrait choisir une norme différente sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$ sans changer la continuité de f.

Proposition 3.9 (Continuité des normes). *Toute norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon > 0$, alors on choisit $\delta = \varepsilon$. On a donc $\|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$ qui implique, par la deuxième inégalité triangulaire,

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \varepsilon,$$

et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \|x\| = \|x_0\|$. □

Proposition 3.10 (Continuité des coordonnées). *Soit $p > 1$ et $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$. Soit $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0 si et seulement si $\forall i \in \{1, ..., p\}$, f_i est continue en x_0.*

Démonstration. Même preuve que pour la limite d'une suite à plusieurs coordonnées. □

Proposition 3.11 (Continuité des applications linéaires en dimension finie). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2,$$

et, de plus, f est continue.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Si $f \equiv 0$, alors le résultat est clair. Sinon, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire, avec la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$,

$$f(x) = Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \right)^T$$

On a ainsi

$$\|f(x)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \|x\|_2.$$

Il existe donc $k := \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) > 0$ (car $A \neq 0$) tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2$. Montrons maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, alors on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ de telle sorte que $\|x - x_0\| < \delta$ implique que

$$\|f(x) - f(x_0)\|_2 = \|f(x - x_0)\|_2 \leq k\|x - x_0\|_2 < k\delta = \varepsilon,$$

ce qui montre bien que f est continue en x_0, et donc sur $\mathbb{R}^n$. $\square$