Définition 6.5 (Matrice/forme quadratique (définie) positive). *Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sa matrice symétrique réelle associée. On dit que*

- *q et A sont positives si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = \langle Ax, x\rangle \geq 0$;*
- *q et A sont définies positives si $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $q(x) = \langle Ax, x\rangle > 0$;*
- *q et A sont (définies) négatives si $-q$ et $-A$ sont (définies) positives.*

Remarque 6.6. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t xAx = \langle Ax, x\rangle$.

Proposition 6.7 (La hessienne est diagonalisable). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en x_0. Alors $H_f(x_0)$ est diagonalisable.*

Démonstration. C'est évident car $H_f(x_0)$ est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable. □

Proposition 6.8 (Positivité et valeurs propres). *Une matrice A symétrique réelle est (définie) positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont (strictement) positives.*

Démonstration. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A (comptées sans leur multiplicité). Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et ainsi, comme, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i u_i, \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\rangle = \langle \lambda_1 x_1 u_1 + \dots + \lambda_n x_n u_n, x_1 u_1 + \dots + x_n u_n\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i \geq 0,$$

ainsi que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i > 0.$$

□

Proposition 6.9 (Condition nécessaire d'ordre 2 pour un extremum). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si x_0 est un point intérieur à E, f est deux fois différentiable en x_0 et x_0 est un point critique de f, alors :*

1. *si f admet en x_0 un minimum local, alors la forme quadratique $h \mapsto D^2_{x_0} f(h, h)$ (et donc $H_f(x_0)$) est positive.*
2. *si f admet en x_0 un maximum local, alors la forme quadratique $h \mapsto D^2_{x_0} f(h, h)$ (et donc $H_f(x_0)$) est négative.*

Remarque 6.10 (Point selle)**.** Si la forme quadratique $h \mapsto D^2_{x_0} f(h, h)$ (ou la matrice $H_f(x_0)$) n'est ni positive, ni négative, le point x_0 n'est ni un maximum, ni un minimum de f. On dit que x_0 est un point selle (ou un col) de f.

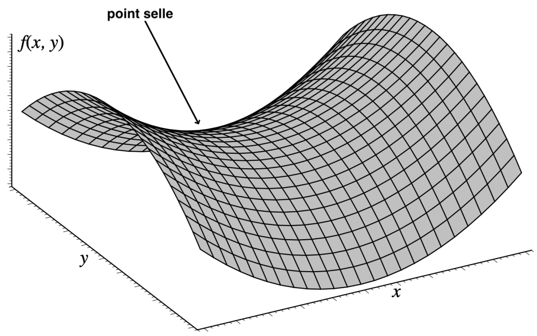

FIGURE 12 : Exemple de point selle

Démonstration. Supposons que f admette un minimum local en x_0. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + th \in E$, on a

$$f(x_0 + th) \geq f(x_0).$$

Supposons que $D^2_{x_0} f \neq 0$, sinon le résultat est évident car $H_f(x_0)$ sera à la fois positive et négative. Alors, comme f est deux fois différentiable en $x_0 \in \mathring{E}$, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on a, comme $o(\|th\|^2) = o(\|h\|^2 t^2) = o(t^2)$ quand $t \to 0$,

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + tD_{x_0} f(h) + \frac{t^2}{2} D^2_{x_0} f(h,h) + o(t^2) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} D^2_{x_0} f(h,h) + o(t^2).$$

Ainsi, quand t est suffisamment petit, le signe de $f(x_0 + th) - f(x_0)$ est celui de $D^2_{x_0} f(h,h)$, et donc $D^2_{x_0} f$ est positive. On montre de façon anologue le deuxième point, dans le cas d'un maximum local. □

Lemme 6.11 (Forme quadratique définie positive et première valeur propre). *Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive, A sa matrice associée et λ_1 la plus petite valeur propre de A. Alors on a*

$$\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\|_2 = 1}} \langle Ax, x \rangle = \lambda_1.$$

Démonstration. Considérons une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs propres de A. Quitte à renuméroter, on suppose que les valeurs propres de A (comptées sans leur multiplicité) sont $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ et donc $\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1,$$

atteint pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$, ce qui prouve le résultat souhaité. □

Proposition 6.12 (Condition suffisante d'ordre 2 pour un extremum local). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si x_0 est un point intérieur à E, f est deux fois différentiable en x_0 et x_0 est un point critique de f, alors :*

1. *si la forme quadratique $h \mapsto D^2_{x_0} f(h,h)$ (ou bien $H_f(x_0)$) est définie positive, alors f admet un minimum local en x_0.*
2. *si la forme quadratique $h \mapsto D^2_{x_0} f(h,h)$ (ou bien $H_f(x_0)$) est définie négative, alors f admet un maximum local en x_0.*

Démonstration. Supposons que $h \mapsto D^2_{x_0} f(h,h)$ soit définie positive. Les valeurs propres de la matrice hessienne $H_f(x_0)$ sont donc toutes strictement positives. Soit λ_1 la plus petite de ces valeurs propres, alors d'après le lemme précédent, on a

$$\inf_{h\in\mathbb{R}^n:\|h\|_2=1} D^2_{x_0} f(h,h) = \lambda_1.$$

Or, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on a, avec ε une fonction de limite nulle quand $h \to 0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}D^2_{x_0} f(h,h) + \|h\|_2^2\varepsilon(h) = \|h\|_2^2\left(\frac{1}{2}D^2_{x_0} f\left(\frac{h}{\|h\|_2},\frac{h}{\|h\|_2}\right)+\varepsilon(h)\right).$$

Ainsi, si $h \neq 0$ est suffisamment petit, $|\varepsilon(h)| \leq \frac{\lambda_1}{2}$ et donc, comme $\frac{h}{\|h\|_2} \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$,

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \|h\|_2^2\left(\frac{1}{2}D^2_{x_0} f\left(\frac{h}{\|h\|_2},\frac{h}{\|h\|_2}\right)+\varepsilon(h)\right) \geq \|h\|_2^2\left(\frac{1}{2}D^2_{x_0} f\left(\frac{h}{\|h\|_2},\frac{h}{\|h\|_2}\right)-\frac{\lambda_1}{2}\right) \geq 0,$$

ce qui veut dire que f admet un minimum local en x_0. On démontre de manière analogue le cas du maximum local. □