Proposition 2.6 (Réunions et intersections d'ouverts et de fermés). *On a :*

1. *Les ensembles $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est un fermé.*
3. *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*
4. *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.*
5. *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*
6. *La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.*

Démonstration.

1. Il est clair que si $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers x, alors $x \in \mathbb{R}^n$. Cela prouve que $\mathbb{R}^n$ est fermé, et donc que $\emptyset$ est ouvert.
De même, soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $B(x,1) \subset \mathbb{R}^n$ et donc $\mathbb{R}^n$ est ouvert. Il en découle que $\emptyset$ est un fermé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors soit $(x_k)_k$ une suite de $\{x\}$. Alors on a évidemment $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = x$. Ainsi, si $(x_k)_k$ converge, c'est vers $x \in \{x\}$. Il en découle que $\{x\}$ est fermé.

3. Soit $(\Omega_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille quelconque (non-nécessairement dénombrable) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Soit $x \in \Omega$, alors il existe k tel que $x \in \Omega_k$. Comme Ω_k est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega_k \subset \Omega$. Ainsi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $\{\Omega_1, ..., \Omega_p\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini d'ouverts. Considérons $\Omega = \bigcap_{k=1}^{p} \Omega_k$. Soit $x \in \Omega$, alors $x \in \Omega_k$ pour tout $1 \le k \le p$. Pour chaque k, il existe $r_k > 0$ tel que $B(x, r_k) \subset \Omega_k$. Ainsi, en choisissant $r = \min_k r_k$, on obtient que $B(x,r) \subset \Omega_k$ pour tout k et donc $B(x,r) \subset \Omega$. Ainsi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $(F_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille quelconque de fermés de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble $F = \bigcap_k F_k$, alors $F^c = \bigcup_k F_k^c$. Comme chaque F_k^c est ouvert, la réunion quelconque F^c de ces ensembles est ouverte dans $\mathbb{R}^n$ d'après 3. On en déduit que F est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

6. Soit $\{F_1, ..., F_p\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini de fermés et soit $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. Alors $F^c = \bigcap F_k^c$ est une intersection finie d'ouverts F_k^c. Il s'agit donc d'un ouvert. On en déduit que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

□

Exemple 2.7 (Contre-exemples). On donne ici deux contre-exemples pour lesquels “fini" ne peut pas être remplacé par “infini" dans la proposition précédente :

1. Intersection infinie d'ouverts qui est fermée : dans $\mathbb{R}$, soit $\Omega_k := \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[$. Alors Ω_k est ouvert pour tout $k \ge 1$, car c'est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon $1/k$, et on a $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \{0\}$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \Omega_k$ donc $\{0\} \subset \Omega$, et si $x \in \Omega_k$ pour tout $k \ge 1$, alors $\forall k \ge 1, -\frac{1}{k} \le x \le \frac{1}{k}$ et donc, en passant à la limite, $0 \le x \le 0$, c'est-à-dire $x = 0$, ce qui prouve que $\Omega \subset \{0\}$. On remarque que $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Union infinie de fermés qui n'est ni ouverte, ni fermée : dans $\mathbb{R}$, soit $F_k = \{\frac{1}{k}\}$, alors F_k est un fermé pour tout $k \ge 1$ et $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$

   (a) n'est pas ouvert car $1 \in S$ et ne contient aucun intervalle ouvert centré en 1 ;

(b) n'est pas fermé car la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_k \subset S$ mais sa limite $0 \not\in S$.

✎ *Exercice : Trouvez d'autres contre-exemples !*

Proposition 2.8 (Boules et sphères). *Quelque soit la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, une boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$. De plus, toute sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
• Toute boule ouverte est un ouvert. Montrons que $B(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in B(x,r)$ et $\delta = r - \|x-y\|$, alors $B(y,\delta) \subset B(x,r)$ car si $z \in B(y,\delta)$, on a

$$\|z-x\| = \|z-y+y-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < \delta + \|y-x\| = r$$

et ainsi $z \in B(x,r)$. Ainsi, il existe une boule ouverte centrée en tout point de $B(x,r)$ contenue dans cette même boule : $B(x,r)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
• Toute boule fermée est un fermé. Soit $(y_k)_k \subset \overline{B}(x,r)$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $y \in \overline{B}(x,r)$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|y-x\| = \|y-y_k+y_k-x\| \leq \|y-y_k\| + \|y_k-x\| \leq \|y-y_k\| + r$$

Ainsi, quand $k \to +\infty$, on a $\|y-y_k\| \to 0$ (par convergence de la suite vers y) et on obtient que $\|y-x\| \leq r$ et donc $y \in \overline{B}(x,r)$, ce qui prouve que $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
• Toute sphère est un fermé. On a $S(x,r) = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = \overline{B}(x,r) \cap B(x,r)^c$. Comme $\overline{B}(x,r)$ est un fermé et $B(x,r)$ un ouvert – et donc son complémentaire $B(x,r)^c$ est un fermé – on en déduit que $S(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de deux fermés. □

Proposition 2.9 (Intervalles de $\mathbb{R}$). *Soient $a < b$ deux réels, alors :*

1. $]a,b[$, $]-\infty,a[$ *et* $]b,+\infty[$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$.
2. $[a,b]$, $]-\infty,a]$ *et* $[b,+\infty[$ *sont des fermés de* $\mathbb{R}$.

✎ *Démonstration.* (Exercice donné en CM) La démonstration de ce résultat utilise à la fois le fait que les boules ouvertes (resp. fermées) sont ouvertes (resp. fermées) et la proposition précédente.
On peut réécrire $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ qui est une boule ouverte, donc un ouvert de $\mathbb{R}$.
Ainsi, en considérant pour tout $k \geq k_0$, $\Omega_k = \left]a+\frac{1}{k}, k\right[$, pour k_0 assez grand de sorte que $a+\frac{1}{k} < k$, qui est ouvert. On a donc

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \Omega_k =]a,+\infty[$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion quelconque d'ouverts. On montre de même que $]b,+\infty[$ est ouvert en échangeant les bornes.
On peut réécrire $[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ qui est une boule fermée, donc un fermé de $\mathbb{R}$.
Comme $]-\infty,a] = \mathbb{R} \setminus]a,+\infty[$, cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert.
Comme $[b,+\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty,b[$, cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert. □

Proposition 2.10 (Ensembles ouverts et fermés). *Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On sait que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée. Supposons que $A \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. On peut donc trouver $a \in A$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$. On pose

$$I = \{t \in [0,1] : (1-t)a + tb \in A\}.$$

On remarque que :

- $I \neq \emptyset$ car $t = 0 \in I$ puisque dans ce cas-là, $(1-0)a + 0 \times b = a \in A$;
- I est majorée par 1 ;
- I est un ensemble fermé. En effet, si $(t_n)_n \subset I$ converge vers t, alors la suite de points $((1-t_n)a + t_n b)_n \subset A$ converge vers $(1-t)a + tb \in A$ car A est fermé. Par définition de I, on a donc $t \in I$.

Ainsi, par les deux premiers points, I admet une borne supérieure s. Soit $(t_n)_n \subset I$ qui converge vers s. Alors, par passage à la limite, $x_0 := (1-s)a + sb \in A$ car I est fermé.
Si $s = 1$, alors il y a une contradiction avec le fait que $(1-1)a + 1 \times b = b \notin A$.
Si $s < 1$, comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$ ce qui implique qu'il existe $t \in]s, 1[$ tel que $ta + (1-t)b \in B(x_0, r) \subset A$, ce qui contredit la définition de la borne supérieure s. On a donc une contradiction dans tous les cas, ce qui veut dire que $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. □

Remarque 2.11. Ainsi, quand on a montré qu'un ensemble (différent de $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$) est ouvert, il est inutile de montrer qu'il n'est pas fermé !

Proposition 2.12 (Produits d'ouverts ou de fermés). *Soient $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ munis de leurs normes euclidiennes $\|\cdot\|_2$, alors :*

1. *si $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux ouverts, alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*
2. *si $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $F_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux fermés, alors $F_1 \times F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. On définit la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de la façon suivante :

$$\forall x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad \|x\|_\infty = \max(\|u\|_2, \|v\|_2).$$

✎ Il s'agit bien d'une norme (Exercice). De plus, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, et pour tout $r > 0$, on a

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} y = (u', v') \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) \iff \max(\|u - u'\|_2, \|v - v'\|_2) < r &\iff \|u - u'\|_2 < r \text{ et } \|v - v'\| < r \\ &\iff u' \in B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \text{ et } v' \in B_{\|\cdot\|_2}(v, r) \\ &\iff y \in B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r). \end{aligned}$$

1. Soit $x = (u, v) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Comme Ω_1 et Ω_2 sont ouverts, alors $\exists r_1, r_2 > 0$ tels que $B(u, r_1) \subset \Omega_1$ et $B(v, r_2) \subset \Omega_2$. Soit $r := \min(r_1, r_2)$, alors

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(u, r_1) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2.$$

   Comme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par l'équivalence des normes en dimension finie, il est donc clair que $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

2. Soit $\{x_k = (u_k, v_k)\}_k \subset F_1 \times F_2$ une suite qui converge vers $x = (u, v)$. Comme F_1 et F_2 sont fermés et $u_k \to u$, $v_k \to v$ alors $u \in F_1$ et $v \in F_2$. Ainsi, $x \in F_1 \times F_2$ et donc cet ensemble est fermé.

□

Remarque 2.13 (Produit de boules). Attention : le produit de deux boules euclidiennes n'est pas une boule euclidienne. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, $B_{\|\cdot\|_2}((0,0), 1) \times]-1, 1[$ où $]-1, 1[$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}$ n'est PAS la boule unité de $\mathbb{R}^3$, $B_{\|\cdot\|_2}((0,0,0), 1)$, mais plutôt un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1.
On a plutôt, pour $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, $B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r)$ comme dans la preuve ci-dessus.

2.2 Points intérieurs ou adhérents

Définition 2.14 (Voisinage). *On dit que $V \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x \in \Omega \subset V$.*

Exemples 2.15. $[0, 2]$, $]-3, 3[$ et $]1/2, 3/2]$ sont des voisinages de $x = 1$ car, par exemple, ils contiennent tous les trois l'intervalle ouvert $]3/4, 5/4[$ qui contient lui-même $x = 1$.

Proposition 2.16 (Relation entre voisinage et ouvert). *Une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte si et seulement Ω est un voisinage de chacun de ses points.*

✎ *Démonstration.* (Exercice donné en CM) Si Ω est un ouvert, alors pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Comme $B(x, r)$ est un ouvert, Ω est donc un voisinage de x.
Réciproquement, si pour tout $x \in \Omega$, Ω est un voisinage de x, cela veut dire qu'il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ tel que $x \in \Omega'$. Comme Ω' est un ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega' \subset \Omega$. Ainsi, Ω est un ouvert. □

Définition 2.17 (Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}^n$). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que le point x est intérieur à A si A est un voisinage de x.*
L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque 2.18. En particulier, x est un point intérieur à A si et seulement si $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Si A est un ouvert, alors chaque $x \in A$ est un point intérieur à A, c'est-à-dire $A = \mathring{A}$.

Remarque 2.19. Un point y est dit extérieur à A s'il est intérieur à son complémentaire. L'extérieur de A est donc $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \setminus A}}$.

Exemple 2.20. Donnons ici quelques exemples de points intérieurs.

1. Le point 1 est intérieur à $]0, 2[$ ou à $[0, 3]$.

2. Le point 1 n'est pas intérieur à $[1,2]$ car il n'existe aucun $r > 0$ tel que $]1-r, 1+r[\subset [1,2]$. Il n'est pas non plus extérieur à celui-ci car il n'appartient pas à $[1,2]^c =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Définition 2.21 (**Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^n$**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point x est adhérent à A si chaque voisinage de x rencontre A, c'est-à-dire que pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A, aussi appelé adhérence de A, est noté $\overline{A}$.*

Exemple 2.22. Soit $A = (x_k)_k \in \mathbb{R}^n$, alors $\overline{A}$ est la réunion de A avec l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(x_k)_k$. En effet, une valeur d'adhérence est un point x au voisinage duquel s'accumule une infinité de termes de la suite.

Proposition 2.23 (**Propriétés de l'adhérence d'un ensemble**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(x_k)_k \subset A$ telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$.*

Démonstration. Supposons que $(x_k)_k \subset A$ converge vers x et montrons que x est adhérent à A. Soit V un voisinage de x. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Or, par convergence de $(x_k)_k$ vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $x_k \in B(x, r)$ et ainsi $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui veut dire que x est un point adhérent à A.
Supposons maintenant que x est adhérent à A. Alors pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui est vrai en particulier pour $B(x, r)$ pour tout $r > 0$. Soit $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite qui tend vers 0. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap A \neq \emptyset$. On a donc construit une suite $(x_k)_k \subset A$ qui converge vers x puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$. □

Exemple 2.24. Donnons quelques exemples et contre-exemples de points adhérents à une partie de $\mathbb{R}^n$:

1. Dans $\mathbb{R}$, le réel 1 est adhérent à l'ensemble $A =]0, 1[$. Il suffit de prendre la suite $(x_k)_k \subset A$ définie pour tout $k \geq 1$ par $x_k = 1 - 1/(k+1) \in]0, 1[$ et remarquer que la suite tend vers 1 quand k tend vers l'infini.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, le point $(0, 0)$ est adhérent à $A =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
En effet, on peut construire la suite $(x_k)_k \subset A$ définie pour tout $k \geq 1$ par $x_k = (1/k, 1/k)$ qui tend vers $(0, 0)$ quand $k \to +\infty$.

3. Le point $x = 1$ n'est pas adhérent à l'ensemble $A = [0, 1/2]$. Il existe en effet un voisinage de x qui ne rencontre pas A, par exemple $V =]3/4, 5/4[$.

Remarque 2.25. On montrera en TD que :

1. L'intérieur de A est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans A, et que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

2. L'adhérence de A (avec une définition équivalente) est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A, et que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Remarque 2.26 (**Pour aller plus loin : le bord d'un ensemble**). On peut aussi définir la notion de bord (ou frontière) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap A^c \neq \emptyset$. On notera ce bord ∂A et on a donc $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$

qui est un fermé comme intersection de deux fermés.

✎ On peut montrer (Exercice) que $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus \mathring{A}$ (et $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \setminus A}} = \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$) et ainsi on a

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \bar{A} \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A}\right) = \bar{A} \setminus \mathring{A},$$

autrement dit, $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ et le triplet constitué de l'intérieur $\mathring{A}$, le bord ∂A et l'extérieur $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \setminus A}}$ de A forme une partition de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.27 (Compact de $\mathbb{R}^n$). *On dit que $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K.*

Remarque 2.28. Une autre définition équivalente sera donnée en L3 en termes de recouvrement de K par des ouverts.

Théorème 2.29 (Heine-Borel). *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.30. Attention : Ce résultat n'est valable qu'en dimension finie !

Démonstration. Supposons que K est fermé et borné. Montrons que K est compact. Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de K. Comme K est borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_k)_k$ admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(k)})_k$. Soit x la limite de $(x_{\varphi(k)})_k$. Comme K est fermé, il est clair que $x \in K$, et donc K est compact.
Réciproquement, supposons que K est compact et montrons que K est fermé et borné. Raisonnons par l'absurde et supposons que K n'est pas fermé. Alors K^c n'est pas ouvert et il existe donc $x \in K^c$ tel que pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap K \neq \emptyset$. Considérons une suite $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap K \neq \emptyset$ et la suite $(x_k)_k \subset K$ ainsi construite tend vers $x \notin K$, car $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$, ainsi que toute ses sous-suites, ce qui est impossible car K et compact. Ainsi K est fermé.
Raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que K n'est pas borné. Il existe donc une suite $(x_k)_k \subset K$ telle que $\|x_k\|_2 \geq k$ pour tout k. Ainsi toute sous-suite de $(x_k)_k$ serait aussi non-bornée et donc divergente, ce qui est une contradiction avec le fait que K est compact. □

Exemple 2.31 (Boules fermées). Toute boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$. En effet, c'est un fermé et, de plus, $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(0, r + \|x\|_2)$, car, d'après la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$y \in \overline{B}(x,r) \Rightarrow \|x - y\|_2 \leq r \Rightarrow \|y\|_2 - \|x\|_2 \leq r \Rightarrow \|y\|_2 \leq r + \|x\|_2 \Rightarrow y \in \overline{B}(0, r + \|x\|_2)$$

donc c'est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Pour aller plus loin : Le Théorème de Riesz nous apprend que les boules fermées sont compactes si et seulement l'espace que l'on considère est de dimension finie. En dimension infinie, la notion de compacité existe mais les boules fermées ne sont pas compactes ! On pourra se référer à cette page pour en savoir plus.

Proposition 2.32 (Produit de compacts). *Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^p$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. $K_1 \times K_2$ est un fermé comme produit de fermés. De plus, il est clair que c'est aussi une partie bornée de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il s'agit donc d'un compact. □

Exemple 2.33. Le cube $K = [0,1]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.