1 Appréhender les distances : les normes sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\mathbb{R}^n := \left\{(x_1, ..., x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Il forme un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies respectivement par

1. addition : $x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
2. multiplication par un scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x = \lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Définition 1.1 (Norme sur $\mathbb{R}^n$). *Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. *Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$;*
2. *Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;*
3. *Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = |\lambda| \|x\|$;*
4. *Inégalité triangulaire : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

On dit alors que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.2 (Valeur absolue). Dans $\mathbb{R}$, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme. On pourra montrer que toute norme sur $\mathbb{R}$ est de la forme $\|\cdot\| = \alpha|\cdot|$ avec $\alpha > 0$.

Remarque 1.3 (Maximum des normes). Soient $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| := \max(\|x\|', \|x\|'')$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 (Distance sur $\mathbb{R}^n$ issue d'une norme). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la distance sur $\mathbb{R}^n$ associée à cette norme est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Remarque 1.5. La notion générale de distance $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est basée sur celle de la norme dans le sens où elle doit vérifier :

1. Positivité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$;
2. Symétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$;
3. Séparation : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
4. Inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Etant donnée cette définition, une distance peut ne pas être issue d'une norme sur $\mathbb{R}^n$.

A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1.6 (**Deuxième inégalité triangulaire**)**.** *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$*. Alors, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, on a*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors on remarque que

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\
\|y\| &= \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans chaque cas et la symétrie $\|u\| = \|-u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ (homogénéité pour $\lambda = -1$) dans le deuxième cas. Ainsi on a montré que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \text{et} \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

ce qui revient à dire que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$. □

Remarque 1.7. Généralement, on synthétise les deux inégalités triangulaires de la façon suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Proposition 1.8 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)**.** *Pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et tout* $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = \lambda y$ *pour un certain* $\lambda \in \mathbb{R}$*, c'est-à-dire que les vecteurs* x *et* y *sont liés.*

Remarque 1.9 (**Produit scalaire**)**.** Une autre façon d'écrire cette inégalité est la suivante : l'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de la norme euclidienne (cf. proposition suivante) $\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et du produit scalaire associé $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. On remarque que $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Remarque 1.10 (**Pour aller plus loin : Inégalité de Hölder**)**.** L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier d'une inégalité plus générale appelée inégalité de Hölder : pour tous réels p et q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a (la première inégalité est évident, c'est la seconde qui est celle de Hölder)

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

✎ Une preuve (abrégée) peut être trouvée/lue/comprise sur cette page.

Démonstration. Le résultat est évident si $x = 0$ ou $y = 0$. Soient $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. On considère alors la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$P(t) := \sum_{k=1}^{n} (x_k + t y_k)^2.$$

Alors il est clair que

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + t^2 y_k^2 + 2t x_k y_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) t + \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Il s'agit donc d'un trinôme du second degré ayant un coefficient dominant strictement positif (car $y \neq 0$). De plus, $P(t) \geq 0$ pour tout réel t. On en déduit donc que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$\Delta := 4 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \leq 0.$$

On a ainsi montré que $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.
De plus, on a égalité si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = 0$, c'est-à-dire

$$P(t_0) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + t_0 y_k)^2 = 0.$$

Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si chacun de ses termes sont nuls, on obtient que $P(t_0) = 0$ si et seulement si

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_k + t_0 y_k,$$

c'est-à-dire si et seulement si $x = -t_0 y$ et les deux vecteurs sont liés ($\lambda = -t_0$). □

Proposition 1.11 (**Normes classiques**). *Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par*

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.12 (**Pour aller plus loin : p-normes**). On peut montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, la p-norme $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

✎ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. L'unique difficulté réside à montrer l'inégalité triangulaire, appelée inégalité de Minkowski. Une preuve, utilisant l'inégalité de Hölder, peut être trouvée/lue/comprise sur cette page.

Démonstration. Vérifions un-à-un les axiomes d'une norme dans chacun des cas.
Norme $\|\cdot\|_1$. Il s'agit d'une simple conséquence du fait que la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$. En effet, on a :

1. Positivité. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|x_k| \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, ce qui implique que $\|x\|_1 \geq 0$.

2. Séparation. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\| = \sum_{k=1}^n |0| = 0$.
Réciproquement, si $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^n |x_k| = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit donc que $x_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, alors, en utilisant l'homogénéité de la valeur absolue,
$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n |\lambda||x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda|\|x\|_1.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors
$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Norme $\|\cdot\|_\infty$. On a

1. Positivité. Soit $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |x_j|$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors il est clair que $\|x\|_\infty = |x_j| \geq 0$.

2. Séparation. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$. Alors cela implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et donc que $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a
$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda||x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors, pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$,
$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| = |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Norme $\|\cdot\|_2$. On a

1. Positivité. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

2. Séparation. Si $x = 0$, alors on a $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n 0^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$. Alors on a nécessairement $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ et toute somme nulle de termes positifs est composée de termes nuls, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k^2 = 0$, i.e. $x_k = 0$, et ainsi $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on a
$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\lambda\|\|x\|_2.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, alors
$$\|x+y\|_2^2=\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^n\left(x_k^2+y_k^2+2x_ky_k\right)=\sum_{k=1}^n x_k^2+\sum_{k=1}^n y_k^2+2\sum_{k=1}^n x_ky_k.$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $2\sum_{k=1}^n x_ky_k\le 2\|x\|_2\|y\|_2$ et ainsi
$$\|x+y\|_2^2\le\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2=\left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2.$$
En prenant la racine carrée de l'expression précédente, on trouve $\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$.

□

Définition 1.13 (Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$). *Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe $m,M>0$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,*
$$m\|x\|\le\|x\|'\le M\|x\|.$$

✎ **Remarque 1.14.** Il s'agit bien d'une relation d'équivalence : binaire, réflexive, symétrique et transitive (exercice).

Théorème 1.15 (Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$). *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Cf. chapitre sur la continuité (on a besoin de la compacité et de la continuité pour prouver ce résultat). □

Définition 1.16 (Boules pour une norme donnée). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, d sa distance associée, $x\in\mathbb{R}^n$ et $r>0$. Alors on définit :*

- *la boule ouverte centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par*
$$B(x,r):=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|<r\right\}=\left\{y\in\mathbb{R}^n:d(x,y)<r\right\}$$
- *la boule fermée centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par*
$$\overline{B}(x,r):=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|\le r\right\}=\left\{y\in\mathbb{R}^n:d(x,y)\le r\right\}$$
- *la sphère centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par*
$$\partial B(x,r)=S(x,r):=\overline{B}(x,r)\backslash B(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|=r\right\}=\left\{y\in\mathbb{R}^n:d(x,y)=r\right\}$$

Remarque 1.17 (Notations). Si plusieurs normes sont définies, il peut y avoir confusion et on pourra noter $B_{\|\cdot\|}(x,r)$, $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ et $\partial B_{\|\cdot\|}(x,r)$.

Exemple 1.18 (Sur $\mathbb{R}$). En dimension $n=1$ pour la valeur absolue, $B(x,r)=]x-r,x+r[$, $\overline{B}(x,r)=[x-r,x+r]$ et $S(x,r)=\{x-r,x+r\}$.

Exemple 1.19 (Représentation des boules dans le plan). En dimension $n=2$, représentons les boules unités ($x=0$ et $r=1$) fermées pour les normes classiques, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned}\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0,1)&=\{y\in\mathbb{R}^2:\|y\|_1\le1\}=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:|y_1|+|y_2|\le1\}\\ \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)&=\{y\in\mathbb{R}^2:\|y\|_2\le1\}=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:y_1^2+y_2^2\le1\}\\ \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)&=\{y\in\mathbb{R}^2:\|y\|_\infty\le1\}=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:\max(|y_1|,|y_2|)\le1\}.\end{aligned}$$

Il suffit de tracer leurs bords sur le cadran $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ et de compléter par symétrie.

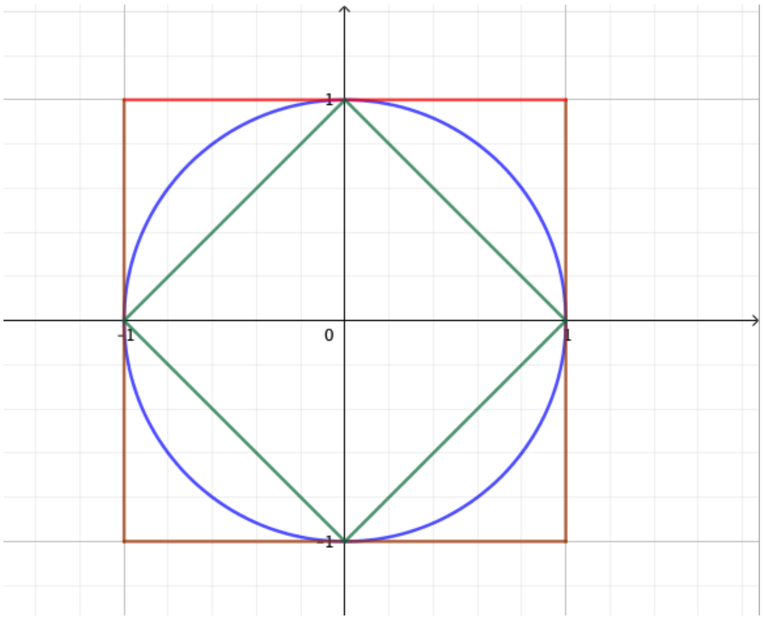

FIGURE 1 : Rouge : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0,1)$; Bleu : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$; Vert : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$.

Définition 1.20 (Ensemble borné). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, on dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné (pour la norme $\|\cdot\|$) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$. Autrement dit, A est borné s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_{\|\cdot\|}(0, M)$.*

Remarque 1.21 (Normes équivalentes et ensemble borné). Dans la pratique, on choisira la norme qui nous arrange puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, montrer que, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in A$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $M_i > 0$ tel que $|x_i| \leq M_i$ suffit pour conclure que A est borné dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.22. Montrons que l'ensemble $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ est borné. En effet, pour tout $(x, y) \in E$, on a

$$2x^2 \leq 2x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad y^2 \leq 2x^2 + y^2 \leq 1,$$

ce qui implique que $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $|y| \leq 1$. Ainsi, E est borné dans $\mathbb{R}^n$.

En particulier, cela montre que $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ et donc E est borné pour la norme infinie.
On aurait pu aussi en déduire que, pour tout $(x, y) \in E$, $\|(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et donc que $E \subset B_{\|\cdot\|_2}(0, 3/2)$.

Définition 1.23 (Convergence d'une suite pour une norme donnée). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ tend vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

On écrit aussi : $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$ *pour la norme* $\|\cdot\|$.