

Feuille d'exercices n° 5

ESPACES AFFINES

I. Espaces et sous-espaces affines

Exercice 1. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ en précisant sa direction.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{E} = E$ et $\vec{\mathcal{E}} = E$.

Montrer que l'addition, de $E \times E$ vers E , définit sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace affine quand on la considère comme une application de $\vec{\mathcal{E}} \times \mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$.

Exercice 3. Soit E et G deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{E} = E$ l'espace affine associé à E par le procédé de l'exercice 2.

1. Soit f une application linéaire de E vers G et soit a un vecteur de G . Montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.
2. Refaire l'exercice 1 comme application du résultat qui précède.
3. Dans $\mathbb{R}^4$, on note

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 7 \text{ et } 3x - z = 5\}.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On note $\mathcal{E} = E$ l'espace affine associé à E par le procédé de l'exercice 2. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dont on note $F = \vec{\mathcal{F}}$ la direction.

1. Justifier l'existence d'un supplémentaire G de F dans E .
2. On note f la projection de E sur G parallèlement à F . Montrer qu'il existe un $a \in G$ tel que $\mathcal{F} = f^{-1}(\{a\})$.

II - Homogénéisation

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$ soit trois droites affines d_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$) d'équations respectives $a_i x + b_i y = c_i$.

1. Dans cette question, on suppose que les trois droites d_i ont au moins un point commun. Montrer que les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ sont liées et en

déduire que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ est nul.

2. Dans cette question on suppose que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. En déduire que le système homogénéisé formé des trois équations $a_i x + b_i y = c_i z$ a au moins une solution non nulle dans $\mathbb{R}^3$. Cela permet-il de conclure que les droites d_i sont concourantes ? On suppose en outre que deux au moins des trois droites d_i ne sont pas parallèles, montrer que les trois droites concourent.

Exercice 6. (Les notations introduites ici servent dans les deux exercices suivants).

Soit $n \geq 1$. On note $\vec{\mathcal{E}}_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ et $\mathcal{E}_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\}$.

On note φ_n la bijection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E}_n$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{n+1}$, de direction $\vec{\mathcal{E}}_n$. (On pourra le faire à la main ou utiliser le 1) de l'exercice 3).
2. Justifier que φ_n est une bijection affine.

Exercice 7. 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on note d_1 l'ensemble défini par les équations $x = 1$ et $y = 2$ et on note d_2 l'ensemble défini par les équations $y = 3$ et $z = 4$. Montrer que d_1 et d_2 sont deux droites affines non parallèles qui ne se rencontrent pas.

2. Dans $\mathbb{R}^4$ on note G_1 l'ensemble défini par les équations $x = t$ et $y = 2t$ et on note G_2 l'ensemble défini par les équations $y = 3t$ et $z = 4t$. Montrer que G_1 et G_2 sont deux plans vectoriels dont l'intersection se réduit à $\{0\}$.
3. Que peut-on dire de $G_1 \cap \mathcal{E}_3$ et de $G_2 \cap \mathcal{E}_3$?

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier, et soit A, B et C trois points de $\mathcal{E}_n$.

1. En remarquant que $\overrightarrow{AB} = B - A$ et que $\overrightarrow{AC} = C - A$, montrer que :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff (B - A, C - A) \text{ est lié.}$$

2. Montrer que si (A, B, C) est libre (comme famille de trois éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$), alors $(B - A, C - A)$ est libre.
3. On suppose $(B - A, C - A)$ libre.
 - a) Soit λ, μ, ν des réels pour lesquels $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$. Montrer que $\lambda + \mu + \nu = 0$.
 - b) Montrer que (A, B, C) est libre.
4. Conclure à l'équivalence suivante :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff (A, B, C) \text{ est lié.}$$

5. Soit $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ et $C = (c_1, c_2)$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Après avoir justifié que A, B et C sont alignés si et seulement si les points $\varphi_2(A)$, $\varphi_2(B)$ et $\varphi_2(C)$ sont alignés, conclure que :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

III - Transformations affines

Exercice 9. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$. Soit f une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ pour laquelle il existe une application $\vec{f}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ vers $\vec{\mathcal{E}}$ telle que pour tous M, N de $\mathcal{E}$ on ait :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}).$$

Montrer que f est une application affine.

Exercice 10. 1. Montrer que l'application h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x + 3y + 6, 5x - y - 1)$$

est une application affine.

2. Montrer que pour toute application affine f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, il existe un et un seul 6-uplet de réels (a, b, c, d, p, q) pour lequel, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = (ax + by + p, cx + dy + q).$$

3. Dans cette question, on note $\text{mat}(f)$ la matrice $(3, 3)$ dans laquelle les six coefficients décrits à la question précédente sont regroupés comme suit :

$$\text{mat}(f) = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que pour toutes applications affines f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\text{mat}(g \circ f) = \text{mat}(g) \times \text{mat}(f).$$

4. Avec les notations de l'exercice 6, montrer que toute transformation affine de $\mathcal{E}_2$ est la restriction à $\mathcal{E}_2$ d'un et un seul endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 11. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Montrer que toute transformation affine de $\mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est un λId avec $\lambda \neq 1$ est une homothétie.
2. Montrer que la composée de deux homothéties de $\mathcal{E}$ est soit une homothétie soit une translation.