Université Claude Bernard - Lyon 1

Algèbre 4 - Printemps 2024

FICHE 4

Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1. Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres réelles de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 2. Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels a, $b \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 3. Soient a, b, c, d et e cinq réels. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & a & b \\ c & d & e \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$ la matrice B est-elle orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B.

Exercice 4. On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u de norme 1 associé à la valeur propre 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 5.

1. Rappeler pourquoi toute matrice de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une matrice de la forme
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
pour au moins un $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. Dans cette question on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}R_\theta P$, et en déduire que toute matrice de de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une matrice de la forme R_θ pour au moins un $\theta \in [0, \pi]$.
3. Montrer que toute matrice de de $O^+(\mathbb{R}^3)$ est semblable (avec matrice de passage dans $O^+(\mathbb{R}^3)$) à une et une seule matrice de la forme R_θ pour un $\theta \in [0, \pi]$, et que deux matrices de $O^+(\mathbb{R}^3)$ sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Exercice 6. Groupe orthogonal en dimension 2. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille 2×2. Le but de l'exercice est de les expliciter.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?

4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthornormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature (rotation ou symétrie), et préciser les éléments caractéristiques (plan/axe de symétrie, axe de rotation, angle de rotation) de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, du produit scalaire défini par :

$$\text{Pour tous } P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini pour tous P par :

$$u(P) = P(-X).$$

Montrer que u est un endomorphisme orthogonal et préciser sa nature géométrique.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Pour $a \in E$ unitaire, on note v_a l'endomorphisme de E défini pour tout x de E par $v_a(x) = a \wedge x$, et p_a la projection orthogonale sur la droite de base a.

1. Quels sont les sous-espaces propres de v_a ? Quelle est son image ?
2. Décrire géométriquement l'application $p_a + v_a$.