Feuille d'exercices n° 3

ADJOINTS ET THÉORÈME SPECTRAL

I. Manipulations de l'adjoint

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. On définit les applications linéaires

$$T_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array} \quad \text{et} \quad T_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,3x) \end{array}$$

1. Montrer que T_1 est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer l'adjoint de T_2.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que $f : x \longmapsto x + k\langle x, a\rangle a$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Montrer que a est un vecteur propre de f
3. En déduire le spectre de f et les sous-espaces propres de f.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^\star) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star \circ u)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u^\star) = \mathrm{Im}(u^\star \circ u)$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme T de $\mathbb{R}^2$ défini par $T(x,y) = (y,x)$.

Exercice 6. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_1[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme de dérivation $\delta : P \in E \longmapsto P'$.

Exercice 7. Soit E un expace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(u)^\star = P(u^\star)$.
2. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux. Montrer que $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(Q(u^\star))$ sont orthogonaux.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u un projecteur de E.

1. Montrer que $u^\star$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $u = u^\star$ si et seulement si u est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(u)$.
3. On suppose dans cette question que u et $u^\star$ commutent.
   (a) Montrer que $u \circ u^\star$ est une projection orthogonale.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u \circ u^\star) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(u \circ u^\star) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u \circ u^\star) = \mathrm{Im}(u)$.
4. En déduire que u et $u^\star$ commutent si et seulement si $u = u^\star$.

II. Utilisation du théorème spectral

Exercice 9. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 10. On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est une matrice orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 11. Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que $A^2 = I$ puis que A est orthogonale.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormée ?

Exercice 12. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Démontrer que

(i). S est positive si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$,

(ii). S est définie positive si et seulement si son spectre est inclus dans $]0; +\infty[$.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension n. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicité. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 14. On définit la relation binaire $\leq$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par

$$A \leq B \iff B - A \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$.

III. Intervention de $u^\star \circ u$ ou de ${}^tAA$

Exercice 15. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer les équivalences suivantes.

1. B est symétrique positive si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$,
2. B est symétrique définie positive si et seulement si il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 16. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[1;n]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2.$$

Exercice 17. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence d'une unique matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = S^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.