Université Claude Bernard - Lyon 1
Algèbre 4 - Printemps 2024

FICHE 1
Produits scalaires et inégalités de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ?

1. Pour $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application χ définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ par :
$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \chi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 2ay_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$
(la réponse dépendra de la valeur du paramètre a).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$
3. On considère l'application $\phi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.
4. On considère l'application ϕ sur $(S_n(\mathbb{R}))^2$ *.
5. On considère l'application $-\phi$ sur $(A_n(\mathbb{R}))^2$ †.
6. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par
$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\,\mathrm{d}t.$$
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire. Déterminer la matrice de φ dans la base $(l_0, ..., l_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $l_k = \frac{p_k}{p_k(k)}$ avec $p_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{k} (X - j)$.

---

*. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques de taille n.
†. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques de taille n.

Exercice 2. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 6x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.
Soient $u = (1, -2, 0), v = (1, 0, -1)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $\varphi^F = \varphi|_F$ le produit scalaire restreint.
Trouver la matrice de φ^F dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$ et calculer $\varphi^F(\alpha, \alpha)$ où $\alpha = au + bv, a, b \in \mathbb{R}$.
2. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire φ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer $\varphi(2X - 1, X^2 + 1)$.
3. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice d'un produit scalaire sur E dans une base de E. Montrer que A est inversible.

Exercice 3. Soient a, b, c, d des réels et soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tous $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

1. Montrez que φ est une forme bilinéaire.
2. A quelle condition φ est-elle symétrique ?
3. A quelle condition φ est-elle antisymétrique ?
4. Donnez la matrice de φ dans la base canonique.
5. Dans le cas où φ définit une forme symétrique, trouver la forme quadratique ‡ associée à φ.

Exercice 4. 1. On considère l'application $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 \end{array} \right.$. Trouver une forme bilinéaire symétrique ϕ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$.

---

‡. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, on dit qu'une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une *forme quadratique* si l'application $E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$ est bilinéaire. Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, *la forme quadratique associée à* φ est $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x, x)$.

2. Même question que précédemment avec $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 \end{array} \right.$

Exercice 5. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \ldots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notation.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Exercice 7. Soient $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Si $x_1^2 + ... + x_n^2 = y_1^2 + ... + y_n^2 = 1$, montrer que $|x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq 1$.

b) En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$.

c) Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 8. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 9. Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. En choisissant un produit scalaire sur l'espace des matrices $n \times n$ montrer que $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}(A^2) \cdot \mathrm{tr}(B^2)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \in \mathbb{R}_+^*\}$. On considère l'application $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right).$$

Montrer que h admet un minimum sur D et décrire les vecteurs pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 11. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, k un réel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 12. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe un produit scalaire hermitien sur E tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormée.

Exercice 14. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ est orthonormée.

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i.
4. Soit $M = \sup\{|Q(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1 \iff Q = X^n$.