## IV.4 Décomposition polaire

**Théorème.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $O \in O_n(\mathbb{R})$, une unique $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

*Démo. Unicité.* Si $x \in \ker({}^tAA - \lambda I_n)$, alors $Sx = \sqrt{\lambda}x$.

*Existence.* Soit $S$ comme ci-dessus. Alors $S^2 = {}^tAA$ et $AS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ car

$$ {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = S^{-1t}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n \ . $$

*Exercices.*

1) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence.
2) Déduire du théorème que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale à coefficients diagonaux $> 0$.

# V Congruences

## V.1 Les matrices symétriques réelles

### V.1.1 Théorème de Sylvester

**Théorème.** Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p+q \leqslant n$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline 0 & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$. De plus

$$ p = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\ {}^txAx > 0}} \{\dim F\},\ q = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\ {}^txAx < 0}} \{\dim F\},\ p+q = \mathrm{rg} A \ . $$

### V.1.2 Pseudo-réduction simultanée des matrices symétriques

**Théorème.** Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est *définie positive*, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale telles que

$$ {}^tPAP = I_n,\ {}^tPBP = D \ . $$

*Démo.* Soit $Q$ telle que ${}^tQAQ = I_n$. La matrice ${}^tQBQ$ est encore symétrique. Donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tO{}^tQBQO$ est diagonale. La matrice $P = QO$ convient.

*Exemple.* Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de $\text{dét}(B - \lambda A) = 0$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $(x, y)_A := {}^t x A y$ telle que $\forall i$, $Bv_i = \lambda_i A v_i$. Alors $P = (v_1|...|v_n)$ convient.

*Exercice.* Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouver $P, D$.

*Réponse.* $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ *conviennent.*