où $x_1, ...x_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, ..., \alpha_r \pm i\beta_r$ sont les valeurs propres de A'.

Démo.

Lemme. Il existe un sous-espace $F \leqslant \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 ou 2 stable par A.

Cas particuliers. A symétrique, antisymétrique ou orthogonale.

Exercices.

1) Déduire du théorème que $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.
2) Si ${}^tAA = A^tA$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures si ${}^tA = -A$, de module 1 si ${}^tA = A^{-1}$.
3) Une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

IV.4 Décomposition polaire

Théorème. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $O \in O_n(\mathbb{R})$, une unique $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Exercices.

1) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence.
2) Déduire du théorème que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux > 0.

V Congruences

V.1 Les matrices symétriques réelles

V.1.1 Théorème de Sylvester

Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p+q \leqslant n$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline 0 & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$. De plus

$$p = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\, {}^txAx > 0}} \{\dim F\},\ q = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\, {}^txAx < 0}} \{\dim F\},\ p+q = \mathrm{rg} A\ .$$

V.1.2 Réduction simultanée des matrices symétriques

Théorème. Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Si A est *définie positive*, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que

$$ {}^tPAP = I_n,\ {}^tPBP = D\ . $$

Démo. Soit Q telle que ${}^tQAQ = I_n$. La matrice ${}^tQBQ$ est encore symétrique. Donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tO{}^tQBQO$ est diagonale. La matrice $P = QO$ convient.

Exemple. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de $\mathrm{dét}(B - \lambda A) = 0$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $(x, y)_A := {}^txAy =$ telle que ${}^\forall i$, $Bv_i = \lambda_i v_i$. Alors $P = (v_1|...|v_n)$ convient.

V.2 Les matrices antisymétriques réelles

V.2.1 le rang

Théorème. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ {}^tPAP = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) $$

avec r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r = \mathrm{rg} A$.

V.2.2 Pfaffien

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

Si $\quad A = {}^tP \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ -m_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & m_n \\ -m_n & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} P$, on pose

$$ \mathrm{Pf} A = \mathrm{dét} P \lambda_1 ... \lambda_n\ . $$

Proposition. *C'est bien défini !*

Exercices.

1) $(Pf\ A)^2 = \mathrm{dét} A$.

2) $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{23}a_{34}.$

3) $^{\forall}P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ ^{\forall}A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}),\ Pf(^tPAP) = \text{dét}P\, Pf\, A.$

V.2.3 Le groupe symplectique $\boldsymbol{Sp_{2n}}(\mathbb{R})$

Soit $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Définition. $Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}) \ :\ {}^tAJA = J\}$.

Théorème. $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $^{\forall}g \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, dét$g = 1$.

Démo. On applique la décomposition polaire et on se ramène au cas où $g = O$ est orthogonale ...