IV.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $^\forall \lambda \in E^*$, $^\exists\, x_\lambda \in E$, $\lambda = \langle x_\lambda, \cdot\rangle$.

Définitions. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose $f^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$^\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\ .$$

On dit que f est *autoadjoint* si $f^* = f$, *orthogonal* si $f^* = f^{-1}$, *normal* si $ff^* = f^*f$.

Exercices.

a) Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors $[f^*]_{\mathscr{B}} = {}^t[f]_{\mathscr{B}}$.

b) Montrer que l'opérateur $P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est autoadjoint dans $R[X]_{\leqslant n}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Propriétés. $f^{**} = f$, $(f+\lambda g)^* = f^*+\lambda g^*$, $(fg)^* = g^*f^*$, $\mathrm{Tr} f^* = \mathrm{Tr} f$, $\mathrm{dét} f^* = \mathrm{dét} f$, $\ker f^* = Im\, f^\perp$, $\ker f^\perp = Im\, f^*$.

Exercice. Soit f tel que $ff^* = f^*f$. Montrer que si $F \leqslant E$ est stable par F, alors $F^\perp$ aussi.

IV.3 Réduction des endomorphismes normaux

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OD^tO = ODO^{-1}$$

où D est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & x_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s & -\beta_s \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $x_i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ et $x_1, ...x_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, ..., \alpha_r \pm i\beta_r$ sont les valeurs propres de A'.

Démo.

Lemme. Il existe un sous-espace $F \leqslant \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 ou 2 stable par A.

Cas particuliers. A symétrique, antisymétrique ou orthogonale.

Exercices.

1) Déduire du théorème que $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.
2) Si ${}^tAA = A^tA$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures si ${}^tA = -A$, de module 1 si ${}^tA = A^{-1}$.
3) Une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.