III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \operatorname{rang}(O - I_n)$. Alors il existe des réflexions orthogonales $r_1, ..., r_k$ telles que $O = r_1 ... r_k$.

Lemme. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\ker {}^tA = (\mathrm{Im} A)^\perp$.

Démo. par récurrence sur $k \geqslant 0$.

Exercices.

1) Si $R = r_1...r_k$ où $r_1, ..., r_k$ sont des réflexions orthogonales, alors $k \geqslant \operatorname{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall r$ *réflexion orthogonale,* $\operatorname{rang}(rA - I_n) \geqslant \operatorname{rang}(A - I_n) - 1$.

2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{rang} O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{3 réflexions orthogonales}} .$$

3) Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $I_n + A$ est inversible et $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

IV Réduction des endomorphismes adjoints

IV.1 Matrices symétriques

IV.1.1 Réduction

Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD^tP$.

Lemme. A possède une valeur propre réelle.

Démo. Par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Exemples.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PD^tP$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $C = PD^tP$ où $P = \left(\sin \frac{ij\pi}{n+1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

et $D = \begin{pmatrix} 2-2\cos\frac{\pi}{n+1} & & \\ & \ddots & \\ & & 2-2\cos\frac{n\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

Exercices.

1. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A-\lambda) \perp \ker(A-\mu)$.
2. Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

IV.1.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A. On note $\mathrm{sign}(A) = (p,q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leqslant i \leqslant n \,:\, \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leqslant i \leqslant n \,:\, \lambda_i < 0\}|\,;$$

c'est la *signature* de A.

Exercices.

1) $p + q = \mathrm{rang}(A)$.
2) $\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,0)$, $\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$, $\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$.

IV.1.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leqslant \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x\in F \\ ||x||=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leqslant \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x\in F \\ ||x||=1}} {}^t x A x \ .$$

Exercices.

1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leqslant \lambda_1(A+B) \leqslant \lambda_n(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.